

# 単粒子ビーム力学 (リング型加速器での)

1日目

# 目次

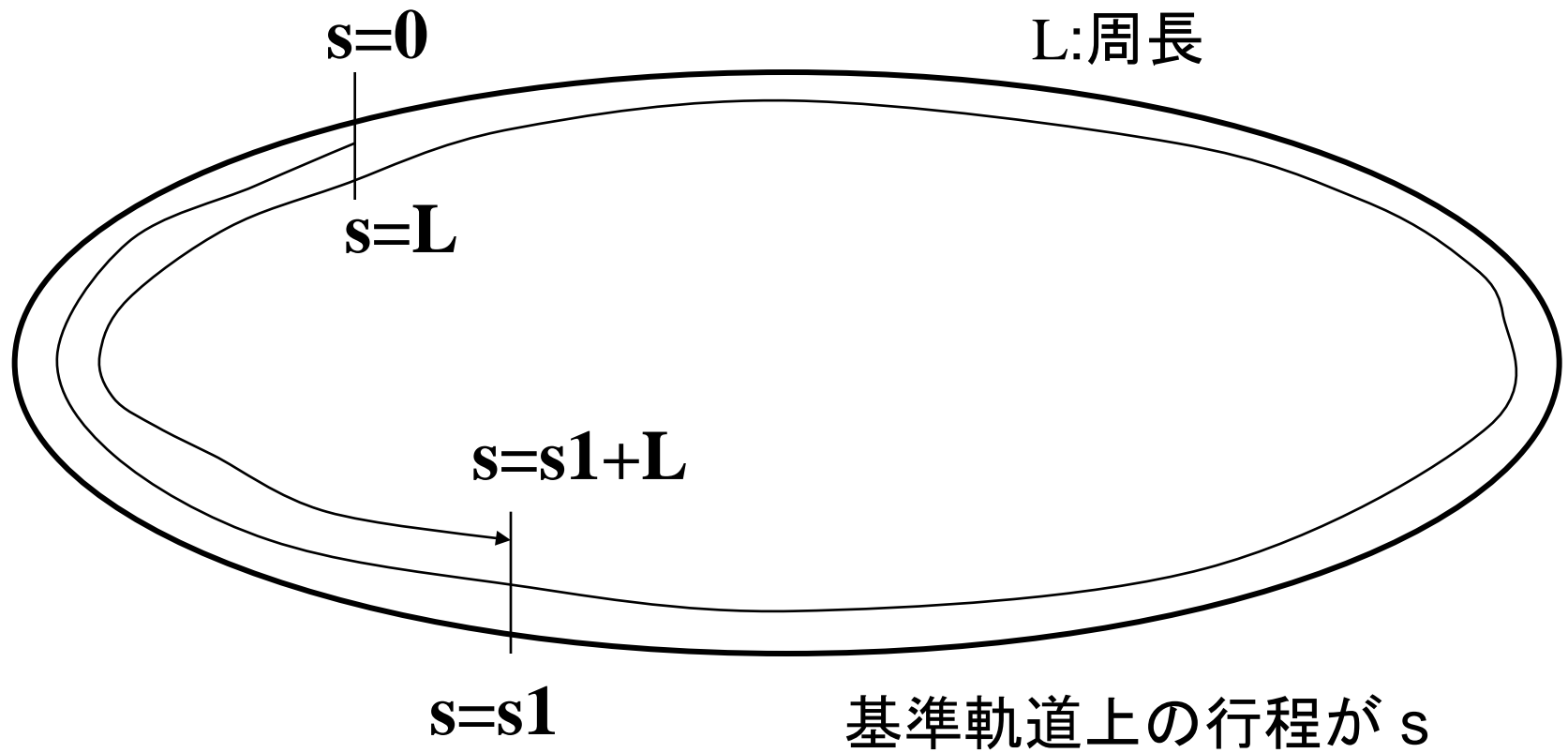
- 曲線直交座標
- ビーム粒子の横方向の運動の基礎
- ベータatron振動
- 弱収束と強収束
- 余分な(微小)磁場の影響
- シンクロトロン振動
- シンクロトロン放射のビームへの影響
- Hamiltonian を使った取り扱い(?)

テキストに沿って話すわけではない

準備：曲線直交座標

# 基準(設計)軌道、独立変数「s」

基準軌道: ビーム粒子は基準軌道の近くを通る。  
ここでは、平面内にあるとする。  
(特殊な場合は1面内にはないかもしれないが、、、、)



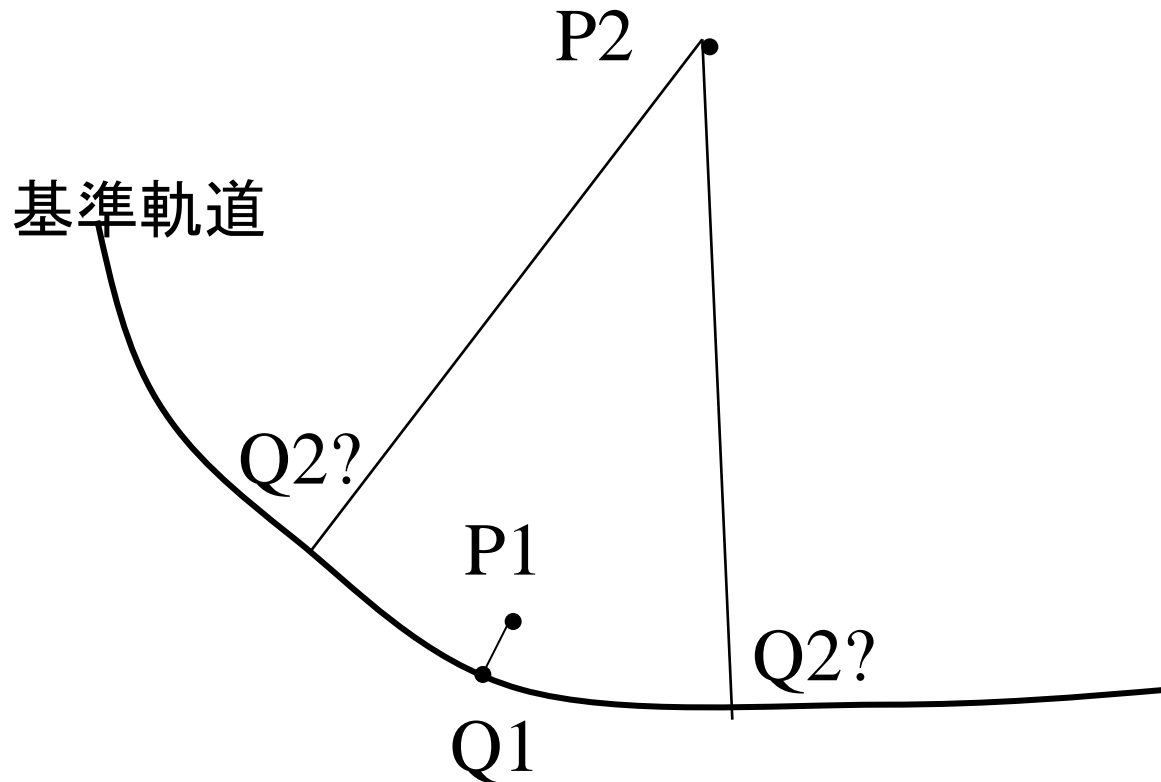
基準軌道に近い点の  $s$  の定義:

その点から基準軌道に垂線を下ろす、その足の  $s$  が  $P$  の  $s$ 。

遠い点の  $s$  は定義できない

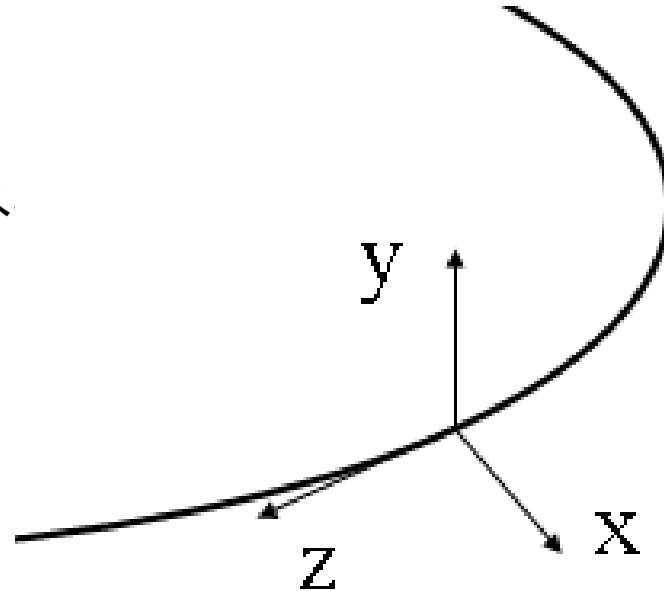
基準軌道はビーム内の粒子が常に近くを通るように決める必要がある。

基準軌道の曲率半径がゼロになるような点(キック)があってはいけない。



# 曲線直交座標

- z: 基準軌道の進む方向
- x: 基準軌道面内で z に垂直(外
- y: 基準軌道面に垂直



# 曲線直交座標まとめ

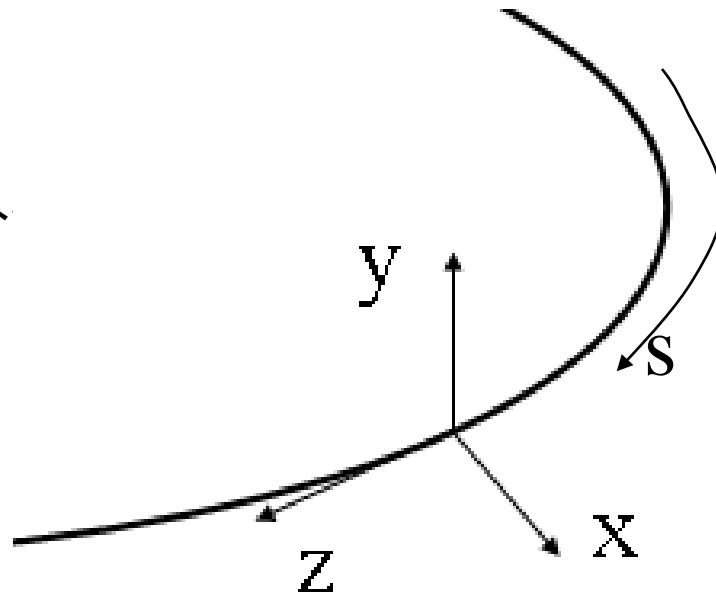
基準軌道はビーム粒子が近くを通るようにとる。(設計軌道)  
水平面内にあるとする。

(そうでなくてもよいが、本質的でない面倒が生じるので。)

独立変数  $s$  : 基準軌道に沿った行程

- $z$  : 基準軌道の進む方向
- $x$  : 基準軌道面内で  $z$  に垂直(外)
- $y$  : 基準軌道面に垂直

縦方向:  $z$  方向(ビーム軸方向)  
横方向: 縦方向に垂直、 $x, y$



# ビーム粒子の横方向の運動の基礎



# 電磁場中のビーム粒子の運動

電荷 $e$ 、速度 $v$ の粒子の受ける力:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

電場                      磁場

電場は加速(エネルギーを上げる)に使われるが、  
粒子の軌道を制御するためには、ほとんど磁場ののみが使われる(例外あり)。

「ビーム」とは方向の揃った多数の粒子の集まり。  
運動方向はほぼ基準軌道の進む方向(z方向)と考えてよい。

ビーム粒子が磁場から受ける力  
は横方向の磁場から受ける横方向:

$$F_x \approx -ev_z \times B_y$$

$$F_y \approx ev_z \times B_x$$

# 磁場の多重極展開

任意の横方向の磁場は多重極展開できる

$$\vec{B}_{\perp} = \sum_{n \geq 1} \vec{B}_{a,n} + \sum_{n \geq 1} \vec{B}_{b,n}$$

normal 2n-pole

$$\vec{B}_{a,n} = a_n \left\{ \vec{x} r^{n-1} \sin[(n-1)\theta] + \vec{y} r^{n-1} \cos[(n-1)\theta] \right\}$$

skew 2n-pole

$$\vec{B}_{b,n} = b_n \left\{ \vec{x} r^{n-1} \cos[(n-1)\theta] - \vec{y} r^{n-1} \sin[(n-1)\theta] \right\}$$

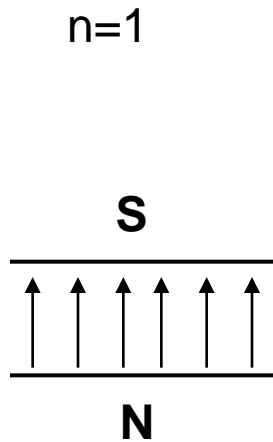
$$(x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta)$$

normal

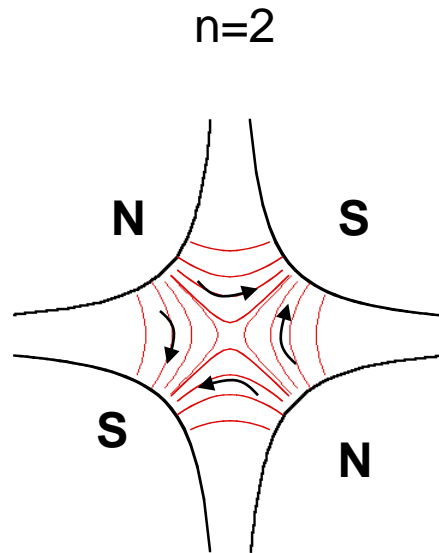
$$\vec{B}_{a,n} = a_n \left\{ \vec{x}r^{n-1} \sin[(n-1)\theta] + \vec{y}r^{n-1} \cos[(n-1)\theta] \right\}$$

加速器のほとんどの磁石は多重極の1個の成分のみを持つよう設計される。  
(誤差などで、弱い余分な成分の磁場が生じる。)

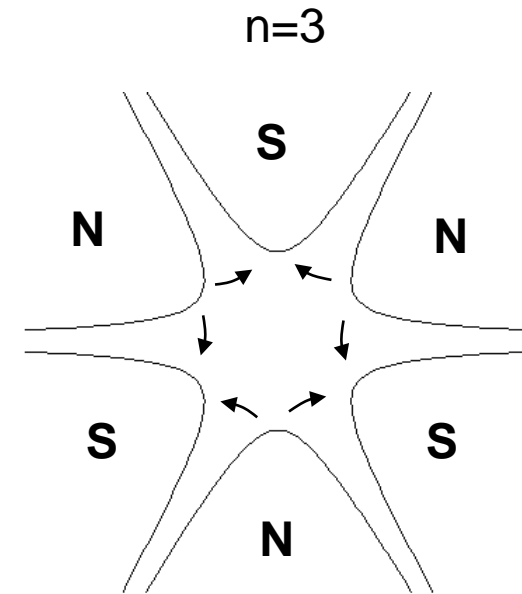
2極磁石



4極磁石



6極磁石



skew

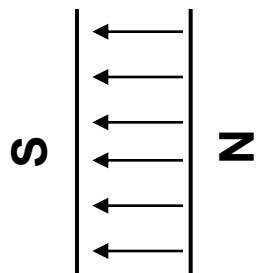
$$\vec{B}_{b,n} = b_n \left\{ \vec{x} r^{n-1} \cos[(n-1)\theta] - \vec{y} r^{n-1} \sin[(n-1)\theta] \right\}$$

2極磁石

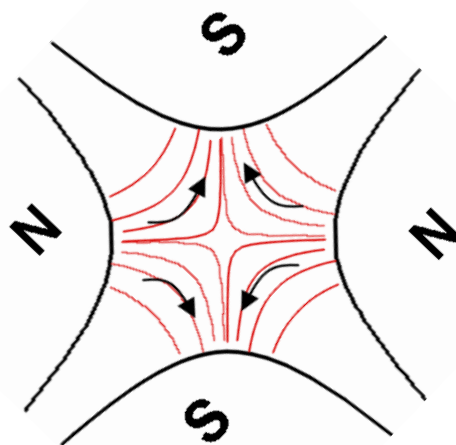
4極磁石

6極磁石

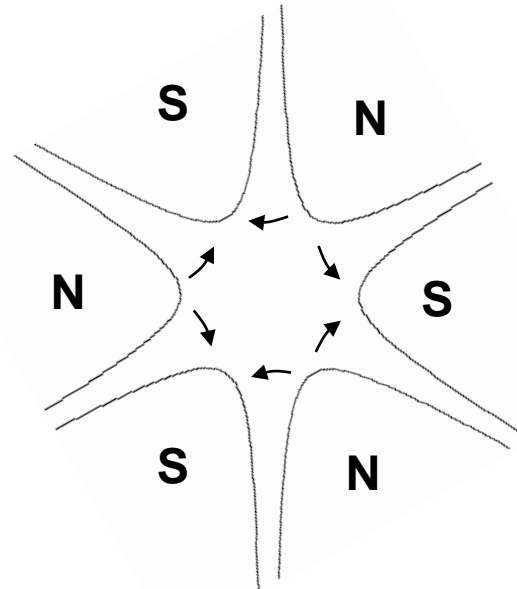
n=1



n=2



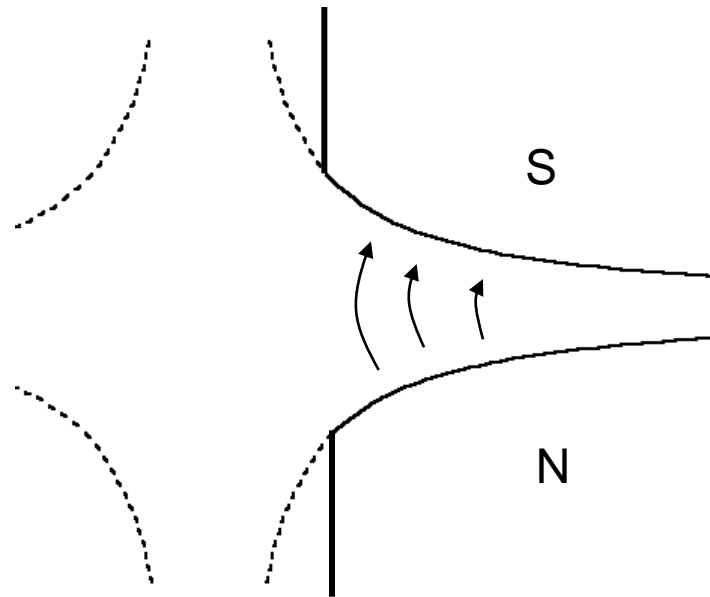
n=3



「normal」を  $\pi/2n$  回転させたもの

# Combined function bending magnet

2極+4極成分の磁場を持ち、偏向と収束の両方の働きをする。  
磁極の形状は、4極磁石の一部のよう



# 磁場の多重極展開と加速器で使われる磁石

- 2極磁石 (水平方向にビームを曲げる)  $n=1$  normal
- 4極磁石 (ビームの収束)  $n=2$  normal
- 6極磁石 (chromaticity 補正)  $n=3$  normal
- その他、設計上は強さがゼロ、誤差補正用の磁石
  - 軌道補正用偏向磁石 ( $n=1$ , normal and skew)
  - x-y カップリング補正用 skew 4極磁石 ( $n=2$  skew)
  - $n>3$  normal,  $n>2$  skew (あまり使われない)
- 粒子が中心近くを通る場合 ( $r$ が小) 高次の多重極成分の影響は小さい

# 線形近似(1次近似)、輸送行列

横方向の運動を記述する変数  $x, x' \equiv \frac{dx}{ds}, y, y' \equiv \frac{dy}{ds}$

ある場所  $s$  での  $(x, x', y, y')$  から、その後の  $s$  での  $(x, x', y, y')$  が決まる。一般に、

$$x(s_2) = f(x(s_1), x'(s_1), y(s_1), y'(s_1), s_1, s_2) \quad \text{etc.}$$

線形近似

$$\begin{pmatrix} x(s_2) \\ x'(s_2) \\ y(s_2) \\ y'(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s_1) \\ x'(s_1) \\ y(s_1) \\ y'(s_1) \end{pmatrix}$$

$s_1$  から  $s_2$  への輸送行列 (Transfer matrix)  
 $s_1, s_2$  の関数

# なぜビーム力学で線形近似が使われるか？

- ビームとは、方向と位置がよく揃った多数の粒子の集まり。
- 基準軌道（設計軌道）の近くを通る。

→  $x, x', y, y'$  は全て小さい

- 例外あり。高次の効果を常に無視してよいわけではない
- まず線形近似で計算し、高次の効果を補正として考慮するのが普通。



# 偏向磁石内のビーム粒子の運動(x方向)

一定磁場中の荷電粒子の運動： 螺旋運動だが、、、

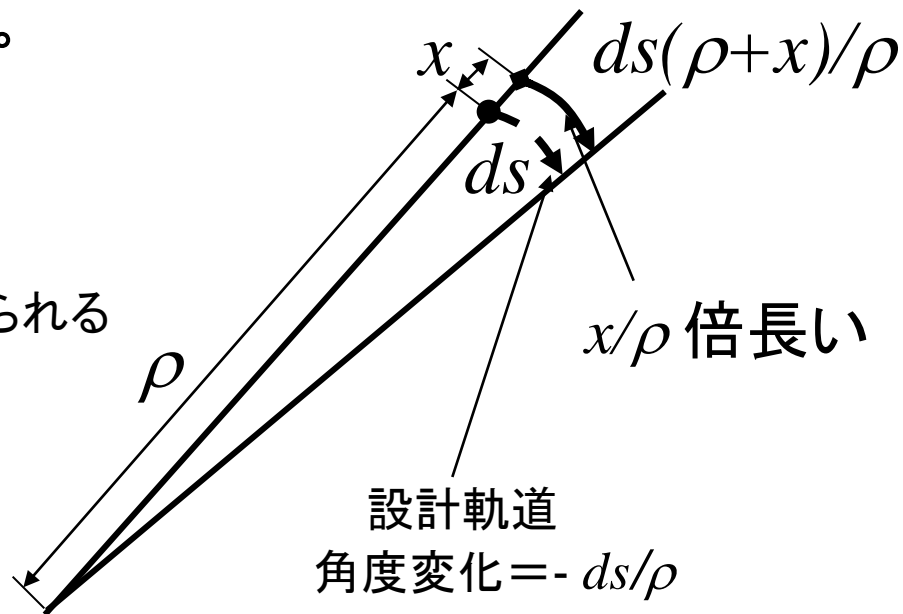
曲線直交座標系での記述(線形近似):  
 まず、微小な角度の扇形で考える。

$$x \rightarrow x + x' ds$$

$$x' \rightarrow x' - x ds / \rho^2$$

外側の方が軌道が長く、より大きく曲げられる

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & ds \\ -ds/\rho^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$



実際の角度変化  
 $= -ds/\rho(1+x/\rho)$

# 偏向磁石内のビーム粒子の運動 ( $x$ 方向) 2

微小角度の輸送行列

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & ds \\ -ds/\rho^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

微分方程式とその解

$$\frac{dx'}{ds} \equiv \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} \rightarrow \begin{cases} x(s) = A \cos(s/\rho) + B \sin(s/\rho) \\ x'(s) = -(A/\rho) \sin(s/\rho) + (B/\rho) \cos(s/\rho) \end{cases}$$

$$A = x(0), \quad B = \rho x'(0)$$

有限の角度 ( $\theta = s/\rho$ ) に対する輸送行列

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

偏向磁石は $x$ 方向に収束力を持つ

# 偏向磁石内のビーム粒子の運動 (y方向)

垂直方向には力を受けない。

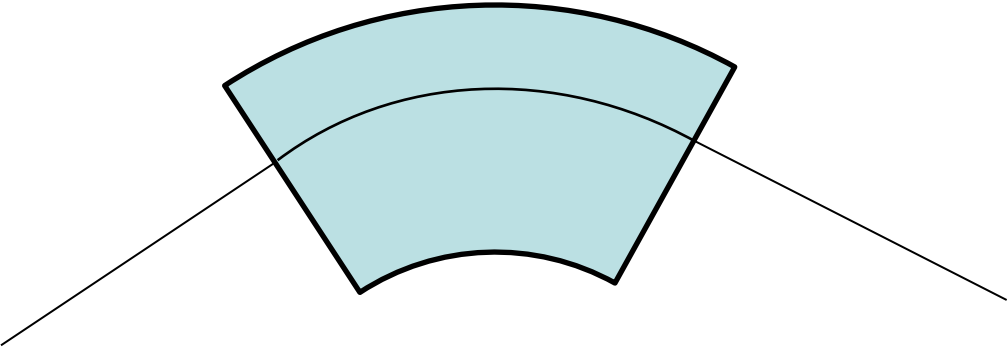
輸送行列

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

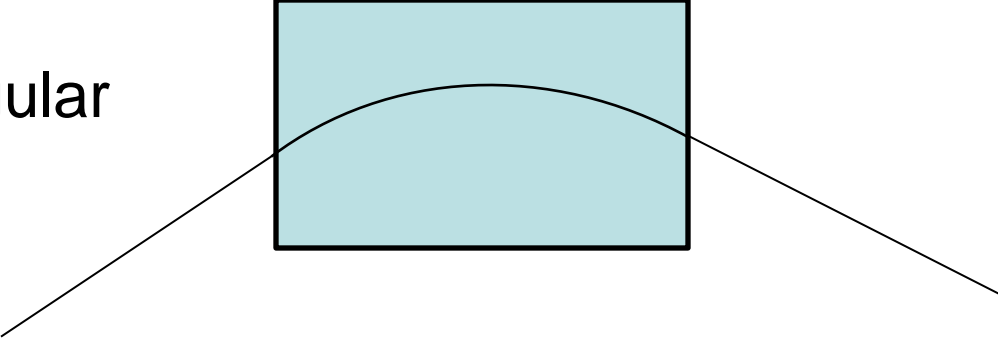
偏向磁石はy方向にはドリフト空間と同じ

注意: これまでの話は、セクター型磁石にのみ成り立つ

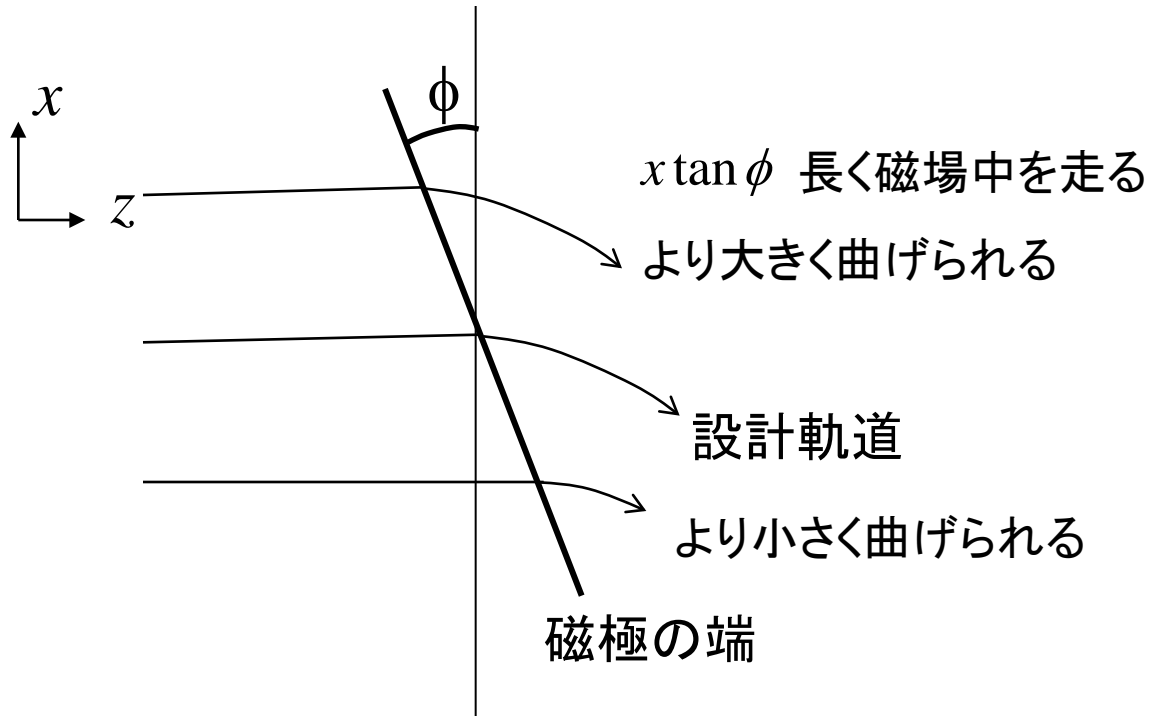
Sector



Rectangular

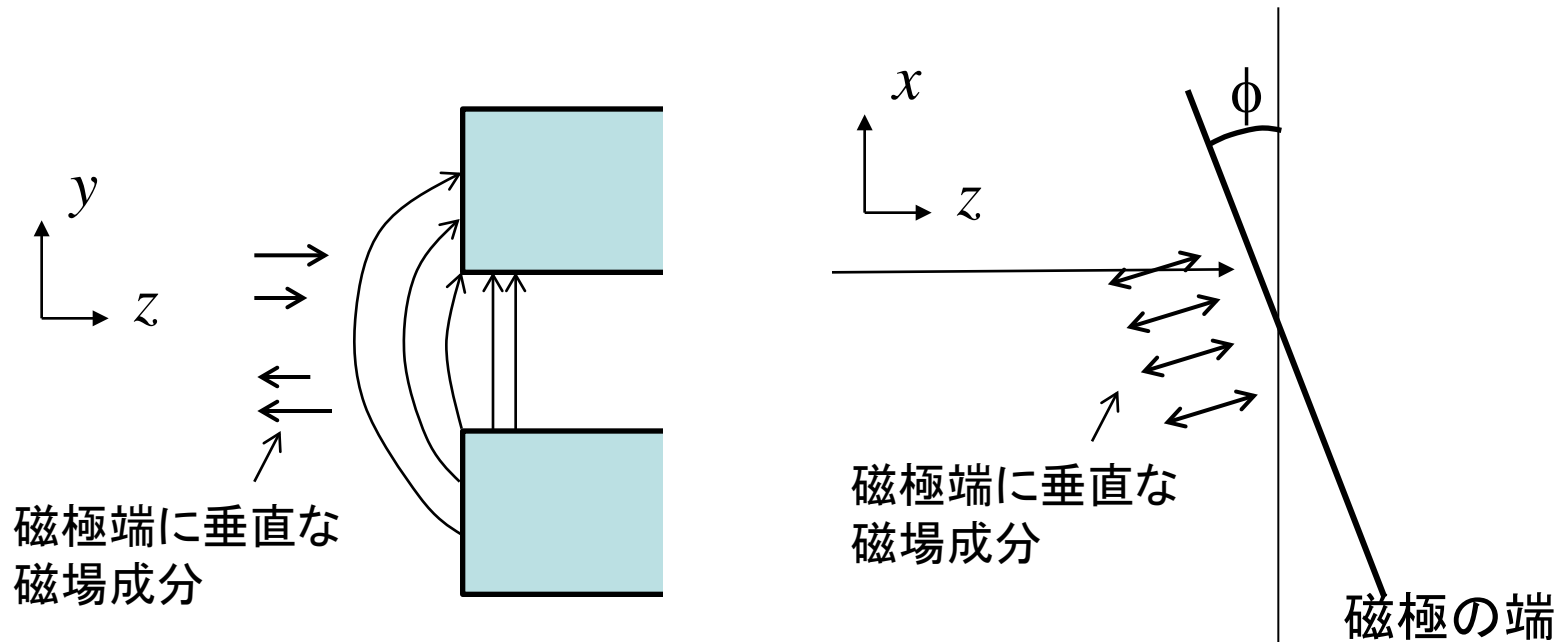


# 偏向磁石の端の効果 $x$



$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1/\rho) \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

# 偏向磁石の端の効果 $y$



軌道と磁極の端が垂直でない場合、 $x$  方向の磁場が  $y$  に依存してできる。

→ 収束、発散力

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1/\rho) \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$x$  方向とちょうど逆

# 偏向磁石の端の効果 まとめ

入口の端面

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1/\rho) \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1/\rho) \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

出口の端面

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1/\rho) \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(1/\rho) \tan \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

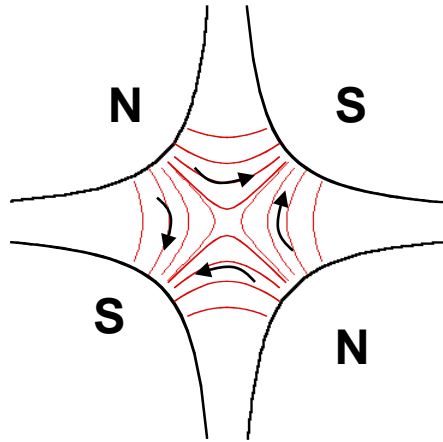
あくまで線形近似での式。高次の効果が無視できない場合もある。

# 4極磁場中のビーム粒子の運動

運動方程式

$$B_y = a_2 x$$

$$B_x = a_2 y$$



$$\frac{dp_x}{dt} = -ev_z a_2 x \rightarrow \frac{dp_x}{ds} = -ea_2 x$$

$$x' = p_x / p_z \approx p_x / p_0$$

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{ea_2}{p_0} x$$

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{ea_2}{p_0} y$$

$$(ea_2 > 0) \quad \begin{aligned} x(s) &= \text{const} \times \cos(\sqrt{-ea_2 / p_0} s + \text{const}) \\ y(s) &= \text{const} \times \cosh(\sqrt{-ea_2 / p_0} s + \text{const}) \end{aligned}$$

$$(ea_2 < 0) \quad \begin{aligned} x(s) &= \text{const} \times \cosh(\sqrt{ea_2 / p_0} s + \text{const}) \\ y(s) &= \text{const} \times \cos(\sqrt{ea_2 / p_0} s + \text{const}) \end{aligned}$$



# 4極磁場中のビーム粒子の運動 2

$$\begin{aligned}
 (ea_2 < 0) \quad & x(s) = \text{const} \times \cos(\sqrt{-ea_2/p_0}s + \text{const}) \\
 & y(s) = \text{const} \times \cosh(\sqrt{-ea_2/p_0}s + \text{const}) \\
 (ea_2 > 0) \quad & x(s) = \text{const} \times \cosh(\sqrt{ea_2/p_0}s + \text{const}) \\
 & y(s) = \text{const} \times \cos(\sqrt{ea_2/p_0}s + \text{const})
 \end{aligned}$$

磁石入り口から出口までの輸送行列:

$$K \equiv \sqrt{|(e/p_0)a_2|} \quad \text{を定義、} l \text{ を磁石の長さとして}$$

$$(ea_2 > 0) \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \cos Kl & \frac{1}{K} \sin Kl \\ -K \sin Kl & \cos Kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{ent}} \quad \text{収束}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} \cosh Kl & \frac{1}{K} \sinh Kl \\ K \sinh Kl & \cosh Kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ent}} \quad \text{発散}$$

$$(ea_2 < 0) \rightarrow x, y \text{ 逆}$$

# 4極磁場中のビーム粒子の運動 3

## Thin lens 近似

$k = (e/p_0)a_2l$  と定義。これを有限にしたまま  $l \rightarrow 0$

$$\begin{pmatrix} \cos K & \frac{1}{K} \sin Kl \\ -K \sin Kl & \cos Kl \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cosh K & \frac{1}{K} \sinh Kl \\ K \sinh Kl & \cosh Kl \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{ent}}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ent}}$$

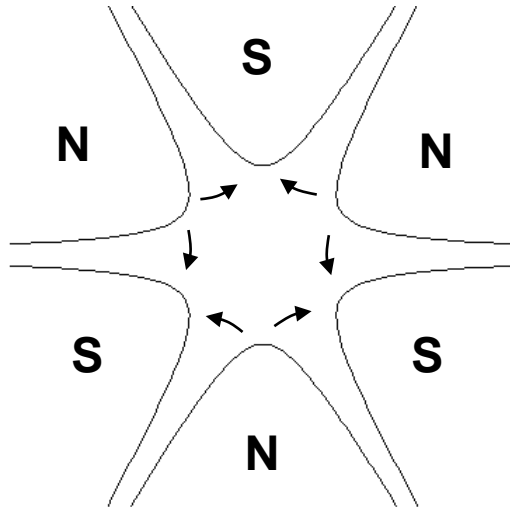
# 4極磁場中のビーム粒子の運動 3

## Thin lens 近似

もう少しよい近似

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{ent}}$$
$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ent}}$$

# 6極磁場中の運動



$$B_y = a_3(x^2 - y^2)$$

$$B_x = 2a_3xy$$

$$\frac{dx'}{ds} = -\frac{ea_3}{p_0}(x^2 - y^2)$$

$$\frac{dy'}{ds} = \frac{2ea_3}{p_0}xy$$

ビーム中心と磁場  
中心が同じ場合  
6極磁場は線形運  
動に影響しない

ビーム中心と磁場中心を  $x$  方向に  $\Delta$  ずらした場合の線形運動への影響。

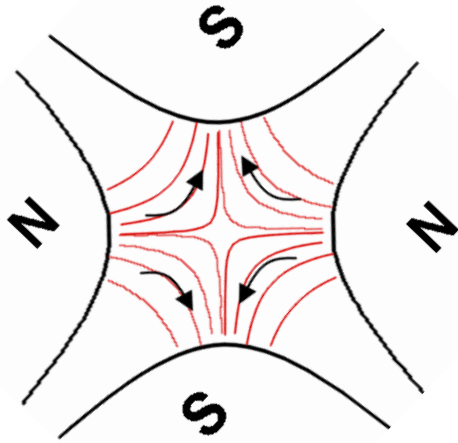
$$B_y = a_3((x - \Delta)^2 - y^2) \approx -2a_3\Delta x$$

$$B_x = 2a_3(x - \Delta)y \approx -2a_3\Delta y$$

$x, y$  の一次のみとると、 $a_2 \leftrightarrow -2a_3\Delta$  に対応する4極磁石と同等になる。

水平方向の位置のずれに比例した収束力を持つ。

# Skew 4極磁場中の運動



$$\begin{aligned}
 B_y &= -b_2 y \\
 B_x &= b_2 x
 \end{aligned}
 \rightarrow
 \begin{aligned}
 \frac{dx'}{ds} &= \frac{eb_2}{p_0} y \\
 \frac{dy'}{ds} &= \frac{eb_2}{p_0} x
 \end{aligned}$$

線形の $x$ - $y$  カップリングを生成する

Thin lens 近似

$$k_s \equiv \frac{eb_2 l}{p_0} \quad \text{として、} \quad \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_s & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{pmatrix}_{\text{ent}}$$

# ビーム粒子の横方向の運動 ベータトロン振動

# 閉軌道 (Closed orbit)

粒子のエネルギー(設計エネルギーからのずれ)は一定とする

- 一周して元の位置、角度に戻ってくる軌道: 閉軌道
  - この軌道にある粒子はこの軌道を回り続ける
- 閉軌道はエネルギーに依存

$$x_{CO}(L+s) = x_{CO}(s)$$

$$x'_{CO}(L+s) = x'_{CO}(s)$$

$s$ : distance along the beam line

$L$ : circumference of the ring

(same for vertical)

以下では閉軌道からのずれを  $x, y$  などと書く。

# 1 自由度の線形運動

$x$ - $y$  カップリングなし、の線形近似。

(ここでは  $x$  を考えるが  $y$  も全く同じ)

一般に周期関数  $K(L+s) = K(s)$  として、

$$x'' + K(s)x = 0$$

という形の運動方程式が書ける。(「Hillの方程式」)

$$\Rightarrow x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0) \quad \text{という解になる}$$

$$\beta(s) = (d\phi/ds)^{-1} \longleftarrow \text{beta-function}$$

$$\beta(L+s) = \beta(s) : \text{common for all particles,}$$

$a$  and  $\phi_0$  : constant, different for different particles

Hill の方程式の解は必ずこの形になる。

$\phi$ ,  $\beta$ ,  $a$  は全て実数(振動)

又は、全て純虚数(発散) ← こういう加速器は働かない



# ベータトロン振動

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

$$x'(s) = -\frac{a}{\sqrt{\beta(s)}} (\sin(\phi(s) + \phi_0) + \alpha(s) \cos(\phi(s) + \phi_0))$$

$\phi$ : 振動の位相

$\beta = (d\phi/ds)^{-1}$  : ベータ関数 : 振幅の  $s$  依存を表す

$$\alpha \equiv -\frac{1}{2} \frac{d\beta}{ds}$$

振幅と位相の進みが場所に依存する振動

# チューン

リングを1周したときの振動の位相の進み

$$\phi(L+s) - \phi(s) = \varphi = 2\pi\nu$$

は、 $s$  によらない。

(ベータ関数  $\beta = (d\phi/ds)^{-1}$  が周期  $L$  の周期関数である  
ことより。テキスト参照)

$\nu_x, \nu_y$  を「チューン(tune)」と呼ぶ

# 輸送行列をベータトロン振動のパラメータで表す

任意の2点間

$$M(s_2, s_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos \psi + \alpha_1 \sin \psi) & \sqrt{\beta_2 \beta_1} \sin \psi \\ -\frac{(1 + \alpha_2 \alpha_1) \sin \psi + (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \psi}{\sqrt{\beta_2 \beta_1}} & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos \psi - \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix}$$

( $\psi = \phi(s_2) - \phi(s_1)$ )



$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0) \\ x'(s) = -\frac{a}{\sqrt{\beta(s)}} (\sin(\phi(s) + \phi_0) + \alpha(s) \cos(\phi(s) + \phi_0)) \\ x(s_2) = a\sqrt{\beta_2} \cos(\phi(s_2) + \phi_0) = a\sqrt{\beta_2} \cos(\phi(s_1) + \phi_0 + \psi) \\ \quad = a\sqrt{\beta_2} \cos(\phi(s_1) + \phi_0) \cos \psi - a\sqrt{\beta_2} \sin(\phi(s_1) + \phi_0) \sin \psi \\ \quad = \sqrt{\beta_2 / \beta_1} x(s_1) \cos \psi - \sqrt{\beta_2} (-\sqrt{\beta_1} x'(s_1) - \alpha_1 \sqrt{1 / \beta_1} x(s_1)) \sin \psi \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

# 輸送行列の行列式は1

$$\det \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos \psi + \alpha_1 \sin \psi) & \sqrt{\beta_2 \beta_1} \sin \psi \\ -\frac{(1 + \alpha_2 \alpha_1) \sin \psi + (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \psi}{\sqrt{\beta_2 \beta_1}} & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos \psi - \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix} = 1$$

# リング周回の(同じ場所の)輸送行列

リング1周

$$M(L+s, s) = \begin{pmatrix} (\cos \varphi + \alpha \sin \varphi) & \beta \sin \varphi \\ -\frac{(1 + \alpha^2) \sin \varphi}{\beta} & (\cos \varphi - \alpha \sin \varphi) \end{pmatrix}$$

リング  $n$  周

$$M(nL+s, s) = (M(L+s, s))^n = \begin{pmatrix} (\cos(n\varphi) + \alpha \sin(n\varphi)) & \beta \sin(n\varphi) \\ -\frac{(1 + \alpha^2) \sin(n\varphi)}{\beta} & (\cos(n\varphi) - \alpha \sin(n\varphi)) \end{pmatrix}$$

位相の進みが  $n$  倍になる

# 安定な振動の条件

1周の輸送行列

$$M(L+s, s) = \begin{pmatrix} (\cos \varphi + \alpha \sin \varphi) & \beta \sin \varphi \\ -\frac{(1 + \alpha^2) \sin \varphi}{\beta} & (\cos \varphi - \alpha \sin \varphi) \end{pmatrix}$$

$\varphi$ が実数であれば安定な振動。

$$\Leftrightarrow |Tr(M)| = 2|\cos \varphi| \leq 2$$

対角和の絶対値が2以下

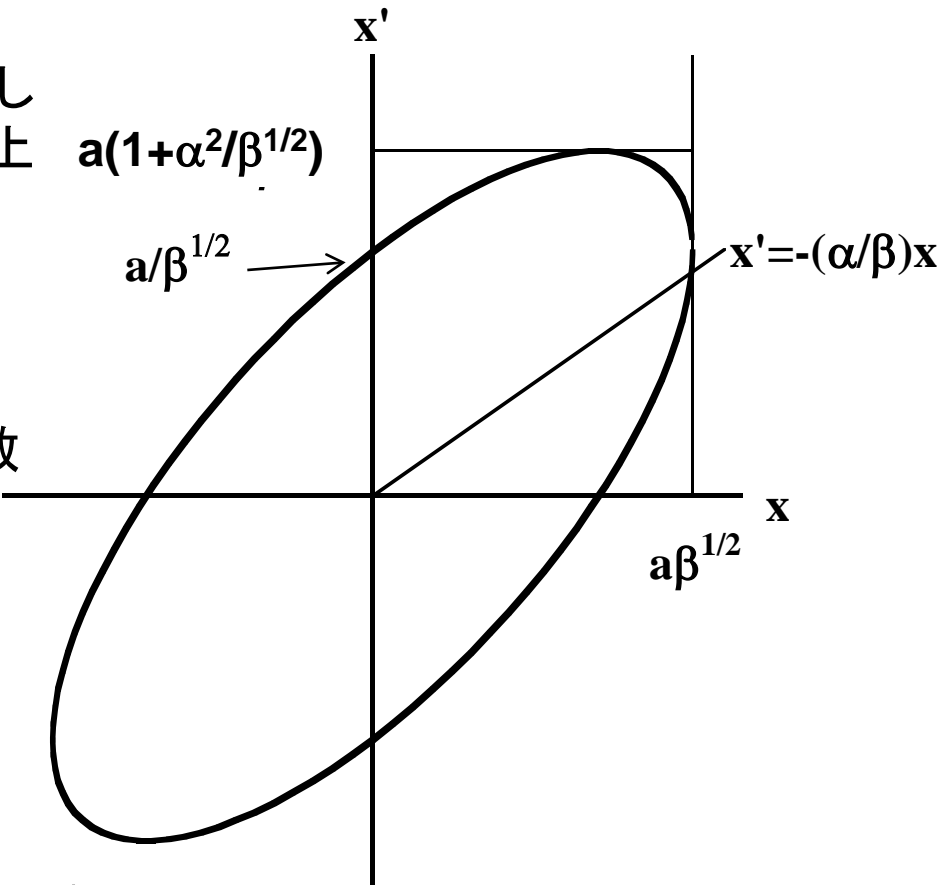
$\varphi$ が純虚数のとき不安定:

$$|\cos \varphi| = \cosh(i\varphi) > 1$$

# $x-x'$ 上の分布

ある場所での、何回も周回して  
 くる粒子の  $x-x'$  は、楕円上  
 にある。

ある場所での、 $a$  が同じ多数  
 の粒子の  $x-x'$  は、楕円上に  
 ある。



位相のみ変化

$$\begin{cases} x = a\sqrt{\beta} \cos \phi \\ x' = -\frac{a}{\sqrt{\beta}} (\sin \phi + \alpha \cos \phi) \end{cases}$$

# 規格化座標、調和振動

規格化座標

$$X \equiv \frac{x}{\sqrt{\beta}}$$

$$\dot{X} \equiv \frac{dX}{d\phi} = \sqrt{\beta}x' + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}x$$

を定義すると、調和振動の形になる。

$$X = a \cos(\phi + \phi_0)$$

$$\dot{X} = -a \sin(\phi + \phi_0)$$

$(X, \dot{X})$  面上では粒子は常に半径  $a$  の円周上にある。



# Courant-Snyder 不変量

ベータatron振動の解の形から、以下は定数  
(s によらない。初期条件のみで決まる。)

$$\frac{1}{\beta}x^2 + \beta\left(x' + \frac{\alpha}{\beta}x\right)^2 = \frac{1+\alpha^2}{\beta}x^2 + 2\alpha xx' + \beta x'^2 = a^2$$

各粒子の不変量

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\sqrt{\beta} \cos \phi \\ x' = -\frac{a}{\sqrt{\beta}} (\sin \phi + \alpha \cos \phi) \end{array} \right.$$

# エミッタンス

$$\varepsilon_x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$$

は線形運動では保存する。

yも同様

$\langle \rangle$ : 全粒子の平均

$$\frac{d(\varepsilon^2)}{ds} \equiv \left\langle 2x \frac{dx}{ds} \right\rangle \langle x'^2 \rangle + \langle x^2 \rangle \left\langle 2x' \frac{dx'}{ds} \right\rangle - 2 \langle xx' \rangle \left\langle \frac{dx}{ds} x' + x \frac{dx'}{ds} \right\rangle$$

これに  $x' = \frac{dx}{ds}$ ,  $\frac{dx'}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2} = -K(s)x$  を代入するとゼロになる。

$$\therefore \left\langle x \frac{dx}{ds} \right\rangle = \langle xx' \rangle, \quad \left\langle x' \frac{dx'}{ds} \right\rangle = -K \langle xx' \rangle, \quad \left\langle \frac{dx}{ds} x' \right\rangle = \langle x'^2 \rangle, \quad \left\langle x \frac{dx'}{ds} \right\rangle = -K \langle x^2 \rangle$$

輸送行列の行列式が1であることから、  
エミッタンスの保存が確かめられる

# エミッタンス 2

エミッタンスはベータトロン振動の式から以下のようにも書ける

$$\varepsilon^2 = \langle a^2 \sin^2 \phi_0 \rangle \langle a^2 \cos^2 \phi_0 \rangle - \langle a^2 \sin \phi_0 \cos \phi_0 \rangle^2$$

$$\varepsilon_x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a\sqrt{\beta} \cos \phi \\ x' = -\frac{a}{\sqrt{\beta}} (\sin \phi + \alpha \cos \phi) \end{array} \right.$$

$a$ 、 $\phi_0$  は粒子ごとに異なるパラメータ(初期条件)。  
平均 $\langle \rangle$ はこれらについて取る。

$\phi_0$  に定数(全粒子に対して共通)を加えてもこれが不変であることは、簡単に確かめられる。(テキスト参照)

# エミッタンス、ビームサイズ、マッチング

## ビームサイズ

$$\sigma_x(s) \equiv \sqrt{\langle x^2(s) \rangle} = \sqrt{\beta(s) \langle a^2 \cos^2(\phi(s) + \phi_0) \rangle}$$

一般には、同じ場所でも周回毎にビームサイズが異なる

$\phi_0$  が0から $2\pi$ まで一様に分布している特別な場合  
( $a$ と $\phi_0$ の間に相関関係がなく、独立に平均をとれる。)  
同じベータ関数の場所なら同じビームサイズ

$$\sigma_x(s) = a\sqrt{\beta(s)/2}$$

同一エミッタンスのビームに対し、ある場所での最大ビームサイズ(異なる周回のうち最も大きい)が最も小さい。

この状態を「マッチング」が取れていると言う。

# マッチングのとれたビームのパラメータ

エミッタンス  $\varepsilon = \langle a^2 / 2 \rangle$

ビームサイズ  $\sigma = \sqrt{\varepsilon\beta}$

---

全粒子の平均

$$\langle x^2 \rangle = \varepsilon\beta$$

$$\langle xx' \rangle = -\varepsilon\alpha$$

$$\langle x'^2 \rangle = \varepsilon \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

1粒子の多数の周回に対する平均  
(マッチングとは無関係)

$$\overline{x^2} = (a^2 / 2)\beta$$

$$\overline{xx'} = -(a^2 / 2)\alpha$$

$$\overline{x'^2} = (a^2 / 2) \frac{1 + \alpha^2}{\beta}$$

---

「マッチング」とは、  
ビーム粒子の分布が、ビームラインの設計に合致している状態

# マッチングの重要性

- 何回も周回した時の最大サイズ < ビームパイプの物理的な大きさがすべての場所で成り立たなければならない、マッチングのとれた状態が、最も大きなエミッタンスのビームを受け入れられる
- 周回のたびに同じ場所でビームの大きさが変わるのは用途によっては受け入れられない。
  - 例えばビームを取り出して使う場合、取り出すタイミングによってビームの状態が変わってしまう。
- 、 、 、

# ベータトロン振動 まとめ

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

$$x'(s) = -\frac{a}{\sqrt{\beta(s)}} (\sin(\phi(s) + \phi_0) + \alpha(s) \cos(\phi(s) + \phi_0))$$

$$\beta = (d\phi/ds)^{-1} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \frac{d\beta}{ds} \quad (\beta, \alpha(L+s) = \beta, \alpha(s))$$

- チューン ( $\nu$ ): リングを1周したときの振動の位相の進み/ $2\pi$
- 安定条件: 1周の輸送行列の対角和の絶対値が2以下
- Courant-Snyder 不変量:  $(1/\beta)x^2 + \beta(x' + \alpha/\beta x)^2$
- エミッタンス:  $\varepsilon_x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle x'^2 \rangle - \langle xx' \rangle^2}$  線形運動では不変
- マッチング:

ビーム粒子の分布が、ビームラインの設計に合致している状態

# 弱収束と強収束



# 全周一定磁場のリング加速器 1

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \text{constant} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{2極磁石} \\ \text{角度 } \theta \text{間の輸送行列:} \end{array} \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

一般の輸送行列

$$M(s_2, s_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(\cos \psi + \alpha_1 \sin \psi) & \sqrt{\beta_2 \beta_1} \sin \psi \\ -\frac{(1 + \alpha_2 \alpha_1) \sin \psi + (\alpha_2 - \alpha_1) \cos \psi}{\sqrt{\beta_2 \beta_1}} & \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2}}(\cos \psi - \alpha_2 \sin \psi) \end{pmatrix}$$

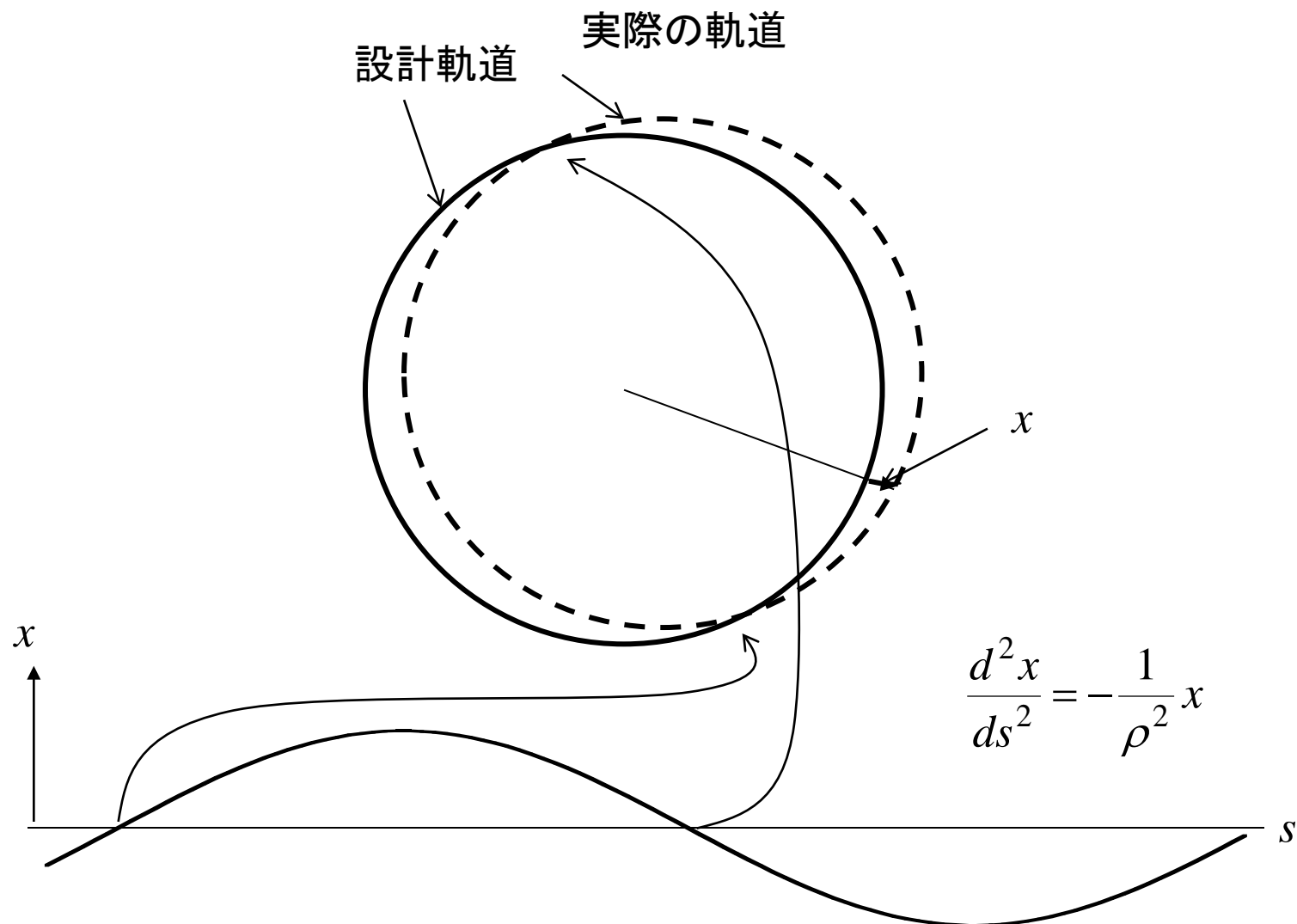
これらを比べて、

$$\beta_x = \rho, \quad \alpha_x = 0, \quad \psi = \theta, \quad \nu = 1$$

ただし、y 方向には収束力がなく、安定でない。

# 一定磁場内の運動：円

$x(s)$  は(1次近似で)周期が周長の振動



# 全周一様な( $s$ によらない)リング加速器

- $y$  方向も安定にするため、一様な垂直方向の収束力を加える。
- 2極磁場だけでなく4極磁場の成分を付け加える。
- 垂直方向の収束力と同じ強さの水平方向の発散力が発生
- 2極磁場による収束力を超えない水平方向の発散力は許される。

$$K = a / \rho^2 \quad (0 < a < 1)$$

のような、一様な発散( $x$ )、収束( $y$ )の4極磁場を加える。

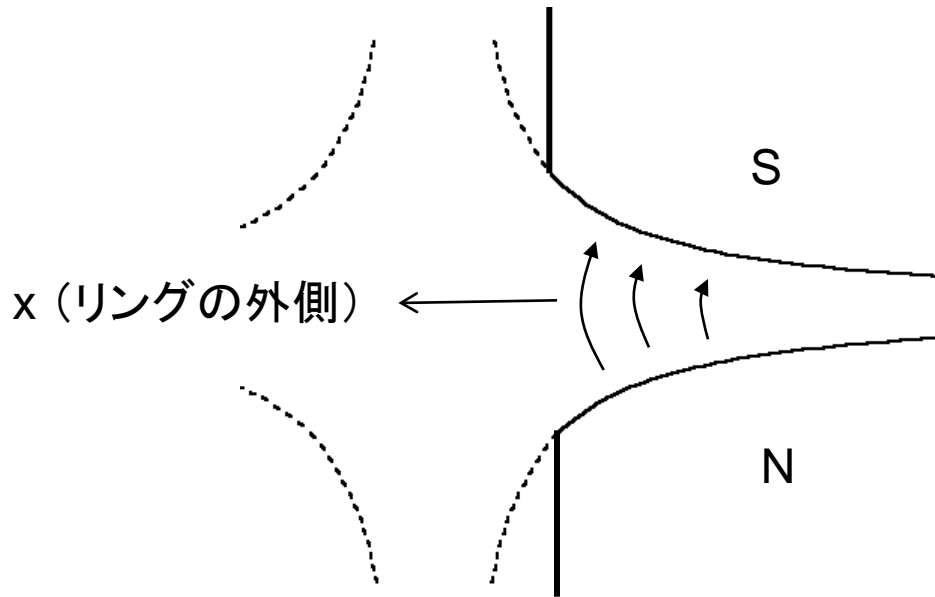
$$\text{運動方程式: } \frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{x}{\rho^2} + Kx = -\frac{(1-a)}{\rho^2} x$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -Ky = -\frac{a}{\rho^2} y$$

$x, y$  方向とも収束。安定となる

# 発散、収束を持つ偏向磁石 Combined function bending magnet

2極+4極成分の磁場を持ち、偏向と収束の両方の働きをする。  
磁極の形状は、4極磁石の一部のよう



# 全周一様な( $s$ によらない)リング加速器 2

角度  $\theta$  間の輸送行列:

$$M_{x,\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{1-a}\theta) & \frac{\rho}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{1-a}\theta) \\ -\frac{\sqrt{1-a}}{\rho} \sin(\sqrt{1-a}\theta) & \cos(\sqrt{1-a}\theta) \end{pmatrix} \quad M_{y,\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a}\theta) & \frac{\rho_0}{\sqrt{a}} \sin(\sqrt{a}\theta) \\ -\frac{\sqrt{a}}{\rho_0} \sin(\sqrt{a}\theta) & \cos(\sqrt{a}\theta) \end{pmatrix}$$

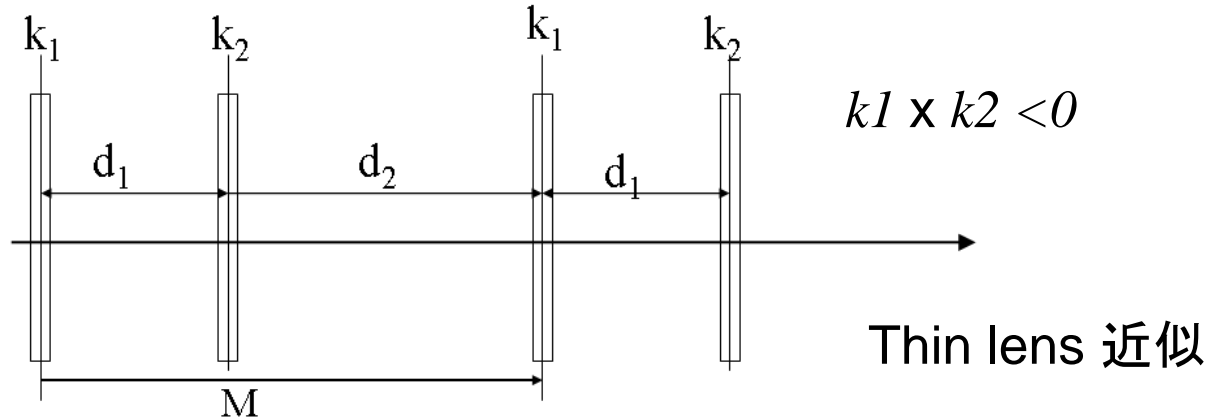
これより、 $\beta_x = \rho/\sqrt{1-a}$ ,  $\alpha_x = 0$ ,  $\nu_x = \sqrt{1-a}$   
 $\beta_y = \rho/\sqrt{a}$ ,  $\alpha_y = 0$ ,  $\nu_y = \sqrt{a}$

- 全周に渡って水平垂直両方向に(ほぼ)一様な弱い収束力を持たせるようなビーム光学設計を「弱収束 (weak focusing)」と呼ぶ。
- ベータ関数がリングの半径より大きく、大きな加速器では横方向のビームサイズが大きくなる。
- 磁石の磁極の間を大きくしなければならず、巨大な磁石(巨大な電源も)が必要になる。
- 大きな(高エネルギーの)加速器では使われない。

# 強収束

- あらゆる場所で収束力があれば安定だが、そうでなくても、
- 収束と発散とを組み合わせることにより全体としてビームを安定にできる
- 周長が大きくなってもベータ関数を小さくでき、従ってビームサイズを小さくできる。
- 比較的小さな磁石を多数並べることで実現できる。

# 強収束の例 FODO



$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k_1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

リング全周がこの同じ要素 (cell) の繰り返りで出来ているとすると、安定条件がは、

$$|Tr(M_{x,y})| \leq 2$$

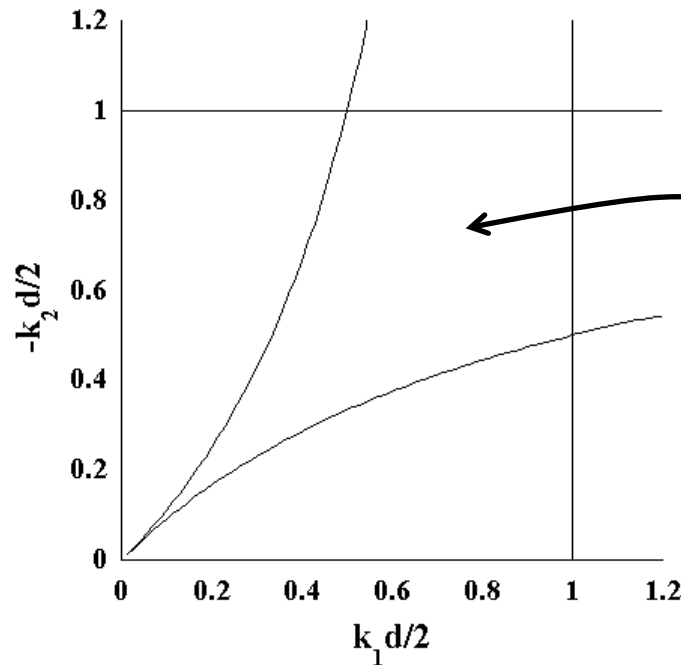
(偏向による収束はとりあえず無視)

# 単純なFODOの安定条件

磁石間の距離が全て等しい場合

$$(d_1 = d_2 = d)$$

$|Tr(M_{x,y})| \leq 2$  から、図のような「ネクタイ」形状の領域が得られる。



$k_1 = -k_2$  の場合は、

$$|kd| < 2$$



# FODOのベータ関数

- リング全周がこの同じ cell の繰り返しで出来ているとすると、ベータ関数は cell の長さを周期とする周期関数のはず。
- Cell の入り口と出口では  $\alpha, \beta$  は同じ。1 cell の輸送行列は

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} \cos \mu_{x,y} + \alpha_{x,y} \sin \mu_{x,y} & \beta_{x,y} \sin \mu_{x,y} \\ -\frac{1 + \alpha_{x,y}^2}{\beta_{x,y}} \sin \mu_{x,y} & \cos \mu_{x,y} - \alpha_{x,y} \sin \mu_{x,y} \end{pmatrix}$$

$\alpha_{x,y}, \beta_{x,y}$  : Cell の端での値。  $\mu_{x,y}$  : Cell 当たりの位相の進み。

- これから  $\alpha, \beta$  を計算できる

# 単純なFODOのベータ関数

- 磁石間の距離が等しく、収束・発散力も等しい場合。

$$d_1 = d_2 = d, \quad k_1 = -k_2 = k > 0$$

- 1 cellの輸送行列

$$M_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 - k^2 d^2 / 2 & 2d(1 \mp kd/2) \\ -k^2 d(1 \pm kd/2) / 2 & 1 - k^2 d^2 / 2 \end{pmatrix}$$

Cellの端:  
 $x$ に発散の4極磁場の中心

- これから、パラメータが求まる:

$$\beta_{x,y} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{1 \mp kd/2}{1 \pm kd/2}}, \quad \alpha_{x,y} = 0, \quad \sin \mu_{x,y} = kd \sqrt{1 - (kd/2)^2}$$

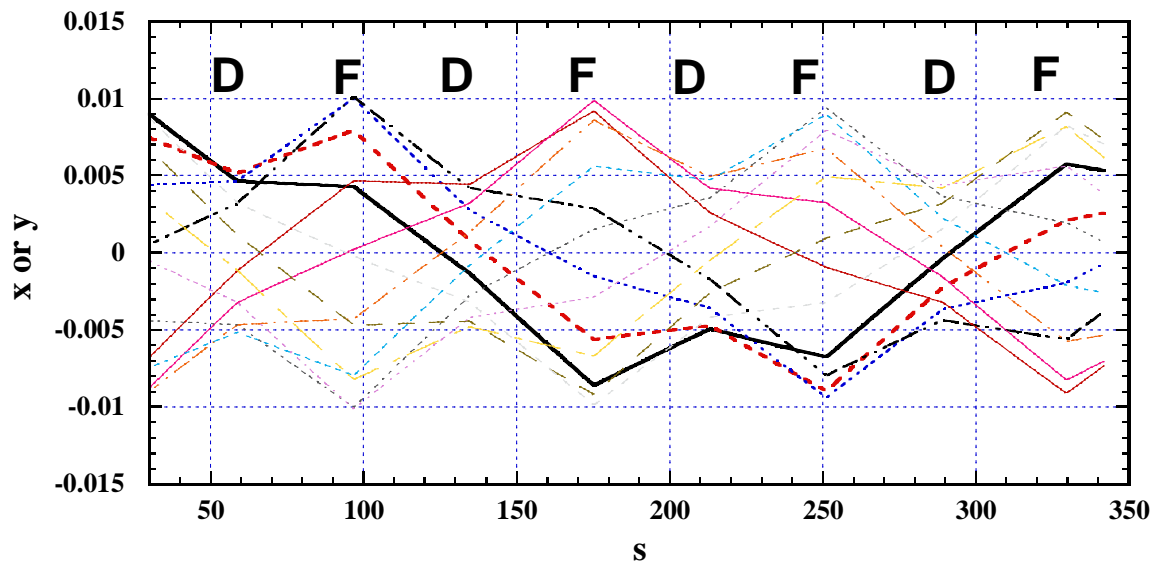
- 安定条件

$$|Tr(M)| \leq 2 \rightarrow kd/2 \leq 1 \rightarrow \beta \sim 2/k \geq d$$

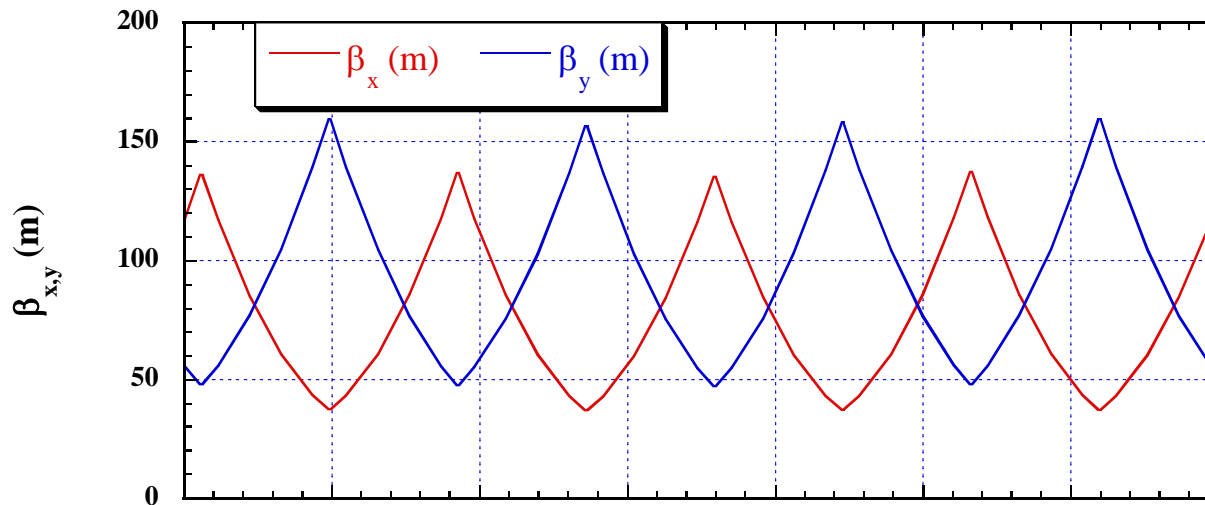
- 故にベータ関数は磁石間の距離と同程度にできる

- 加速器全体の長さとは無関係に、多数の磁石を並べることで、ビームサイズを小さくできる。(個々の磁石は小さくできる。)

(FODOでの軌道。振幅が同じで位相の違う粒子)



FODOのベータ関数



# 弱収束と強収束 まとめ

## 弱収束

- 全周(ほぼ)1様に  $x, y$  両方向弱い収束力を持たせる
  - 2極磁場+水平発散(垂直収束)の4極磁場
  - 2極磁場の収束力 > 水平発散力 とする
  - ベータ関数 > リングの半径

## 強収束

- 収束、発散の4極磁場を組み合わせるにより、全体として安定なベータatron振動が得られる
  - 4極磁場は、水平、垂直方向どちらか収束なら他方向には発散
- 周長の長いリングでもベータ関数を小さくできる

余分な(微小)磁場の影響

# 余分な2極磁場

- ある場所に余分な2極磁場がある場合（設計からのずれ）。その場所で一定の角度変化を受ける。

$$x_0 \rightarrow x_0, \quad x_0' \rightarrow x_0' + \theta$$

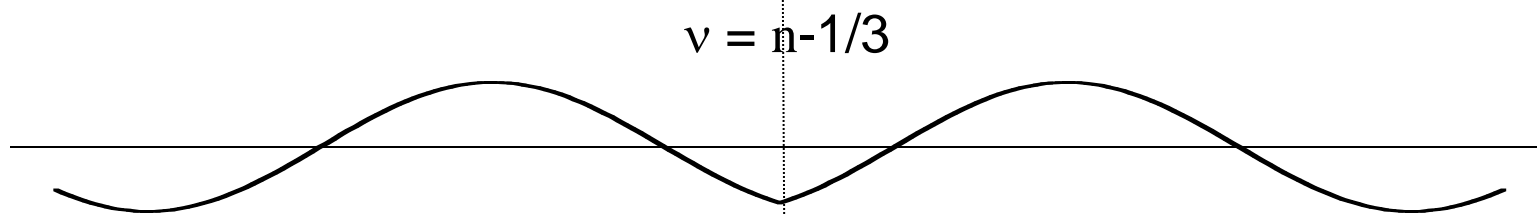
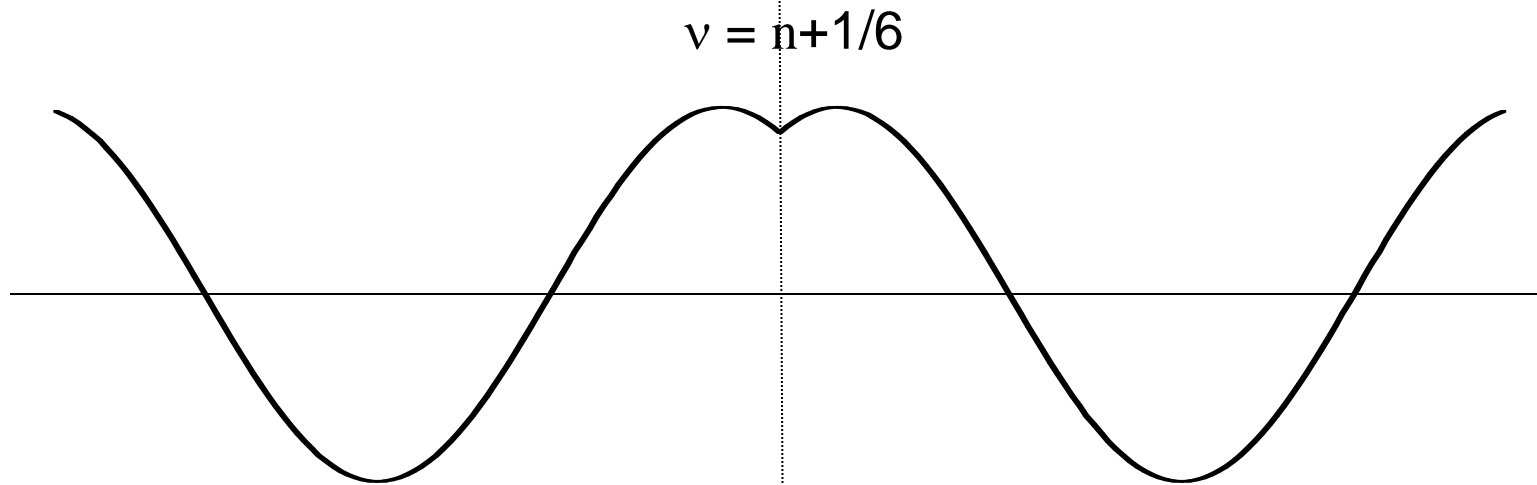
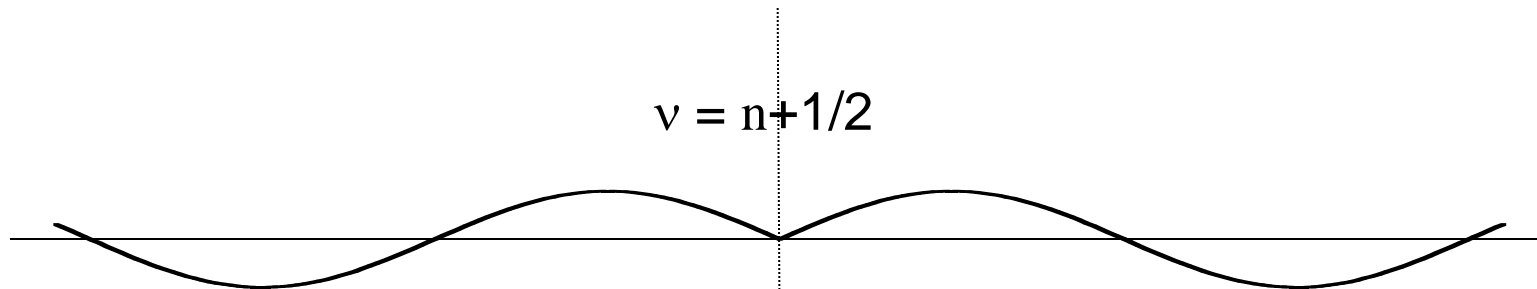
- リングを1周した後は、1周の輸送行列を掛けて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin \varphi & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' + \theta \end{pmatrix}$$

- $(x, x') = (0, 0)$  はもはや閉軌道ではない。閉軌道を与える式は、

$$(x_1, x_1') = (x_0, x_0') \Rightarrow x = \frac{\beta \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \theta, \quad x' = \frac{-1 + \cos \varphi - \alpha \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \theta$$

- 余分な2極磁場は閉軌道を変える
- 上の式は、チューン  $\nu = \varphi / (2\pi)$  が整数のとき発散する。（共鳴）
  - 毎回同じ位相で蹴られるので



$$x = \frac{\beta \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \theta, \quad x' = \frac{-1 + \cos \varphi - \alpha \sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \theta$$

# 余分な4極磁場 1

- ある場所に余分な4極磁場がある場合(設計からのずれ)、その場所での輸送行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

- 新たなリング1周の輸送行列は、元の1周の輸送行列を掛けて得られる

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\varphi} + \tilde{\alpha} \sin \tilde{\varphi} & \tilde{\beta} \sin \tilde{\varphi} \\ -\frac{1 + \tilde{\alpha}^2}{\tilde{\beta}} \sin \tilde{\varphi} & \cos \tilde{\varphi} - \tilde{\alpha} \sin \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin \varphi & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi - k\beta \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\frac{1 + \alpha^2}{\beta} \sin \varphi - k(\cos \varphi - \alpha \sin \varphi) & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix}$$

- 1周の位相の進みの変化

$$\text{Tr}(M)/2 = \cos \tilde{\varphi} = \cos \varphi - (k\beta/2) \sin \varphi$$

$$|k\beta| \ll 1 \text{ の場合 } \cos \varphi - (k\beta/2) \sin \varphi \approx \cos(\varphi + k\beta/2)$$

$$\rightarrow \tilde{\varphi} \approx \varphi + k\beta/2$$



# 余分な4極磁場 2

- 安定条件、 $Tr(M) \leq 2$  は

$$|2 \cos \tilde{\varphi}| = |2 \cos \varphi + k\beta \sin \varphi| \leq 2$$

- この安定条件は以下のように書ける

$$|\cos(\varphi - \Delta)| \leq \cos \Delta \quad (\Delta \equiv \arctan(k\beta/2), \quad -\pi/2 < \Delta < \pi/2)$$

- あるいは、不安定となる条件は、整数  $n$  として

$$n\pi < \varphi < n\pi + 2\Delta \quad \rightarrow \quad n/2 < \nu < n/2 + \Delta/\pi \quad (\Delta > 0)$$

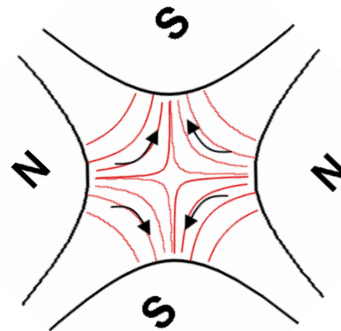
$$n\pi + 2\Delta < \varphi < n\pi \quad \rightarrow \quad n/2 + \Delta/\pi < \nu < n/2 \quad (\Delta < 0)$$

- チューン  $\nu$  が整数、半整数に近いとき不安定
  - 整数のとき: どの周回でもベータatron振動の同じ位相で同じ方向に蹴られる
  - 半整数のとき: 周回毎に反対の位相で反対方向に蹴られる

# skew 4極磁場 1

- ある場所に skew 4極磁場がある場合
- 水平方向(x)と垂直方向(y)の運動のカップリングを生じる。

$$B_y = -b_2 y$$
$$B_x = b_2 x$$



$$x' \rightarrow x' + k_s y, \quad y' \rightarrow y' + k_s x$$

# skew 4極磁場 2

- $x$  方向の振動  $x_n = A \cos(2\pi\nu_x n)$  ( $n$ 周目の $x$ )が  $y$  方向の振動を励起することを考える(とりあえず、 $y \rightarrow x$  は考えない)
- $n$  周目の  $y$  方向の角度変化:  $\Delta y'_n = k_s x_n$
- $N$  周目の  $y$  方向の位置は、それまでの効果をすべて足したもの

$$\begin{aligned}\Delta y_N &= \sum_{n < N} \Delta y'_n \beta_y \sin(2\pi\nu_y(N-n)) \\ &= \sum_{n < N} A\beta_y k_s \cos(2\pi\nu_x n) \sin(2\pi\nu_y(N-n)) \\ &= A\beta_y k_s \sum_{n < N} \left[ \sin(2\pi(N\nu_y + (\nu_x - \nu_y)n)) + \sin(2\pi(N\nu_y - (\nu_x + \nu_y)n)) \right] / 2\end{aligned}$$

- この  $n$  についての和は、 $\nu_x - \nu_y \approx \text{integer}$  か、 $\nu_x + \nu_y \approx \text{integer}$  でなければ大きくなるしない。
- 共鳴(resonance)現象で、
  - $\nu_x - \nu_y \approx \text{integer}$  : difference resonance
  - $\nu_x + \nu_y \approx \text{integer}$  : sum resonance
- 共鳴状態では、 $\Delta y_N \approx AN\beta_y k_s \sin(2\pi N\nu_y) / 2$

# skew 4極磁場 3

- 今度は、共鳴状態で励起された  $y$  方向の振動による  $x$  方向への影響を考える。
- $n$  周目の  $y$ :  $y_n \approx An\beta_y k_s \sin(2\pi n \nu_y) / 2$
- $n$  周目の  $x$  方向の角度変化:  $\Delta x'_n = k_s y_n$
- $N$  周目の  $x$  方向の位置は、それまでの効果をすべて足したもの + 元の振動

$$\begin{aligned}x_N &= \sum_{n < N} \Delta x'_n \beta_x \sin(2\pi \nu_x (N - n)) + A \cos(2\pi \nu_x N) \\ &\approx \sum_{n < N} An\beta_y \beta_x k_s^2 \sin(2\pi \nu_y n) \sin(2\pi \nu_x (N - n)) / 2 + A \cos(2\pi \nu_x N) \\ &= A\beta_y \beta_x k_s^2 \sum_{n < N} n \left[ \cos(2\pi(\nu_x N - (\nu_x + \nu_y)n)) - \cos(2\pi(\nu_x N - (\nu_x - \nu_y)n)) \right] / 4 + A \cos(2\pi \nu_x N) \\ &\approx \left( 1 \pm N(N - 1) \beta_y \beta_x k_s^2 / 8 \right) A \cos(2\pi \nu_x N)\end{aligned}$$

- Sum resonance のとき +  $\rightarrow$  振幅が大きくなり不安定
- Difference resonance のとき -  $\rightarrow$  振幅は小さくなり、安定 (x-y の共振はあるが、発散しない)

# 余分な(微小)磁場の影響 まとめ

- 余分な2極磁場は閉軌道を変える
  - チューンが整数のとき共鳴を起こして発散する。
- 余分な4極磁場はチューンを変える:
  - 変化の大きさは、磁場強度とそこでのベータ関数に比例
  - チューンが整数または半整数のときに共鳴を起こして不安定になる。
- skew 4極磁場は水平方向(x)と垂直方向(y)の運動のカップリングを生む。
  - Sum resonance  $\nu_x + \nu_y \approx \text{integer}$  では、共振(共鳴)により振動が発散して不安定となる。
  - Difference resonance  $\nu_x - \nu_y \approx \text{integer}$  では、共振は生じるが、発散することはない、不安定にはならない。

# 単粒子ビーム力学 (リング型加速器での)

2日目

# 目次

- 曲線直交座標
- ビーム粒子の横方向の運動の基礎
- ベータatron振動
- 弱収束と強収束
- 余分な(微小)磁場の影響
- シンクロトロン振動
- シンクロトロン放射のビームへの影響
- Hamiltonian を使った取り扱い(?)

テキストに沿って話すわけではない

# 縦方向の運動 シンクロトロン振動

これまで、進行方向の運動量は不変であるとしたが、ここでは運動量(エネルギー)の変化を考える。

横方向の振動はないとする。



# Momentum compaction

- 閉軌道は粒子の運動量に依存し、従って軌道の長さ( $C$ )も依存する。
- 粒子の速さは運動量に依存(超相対論的でない場合)
- 従って、閉軌道の1周に要する時間( $T$ )は運動量一に依存。
- その依存性の線形部分を「momentum compaction」と呼ぶ。

時間の変化

$$\eta_c = \frac{1}{T_0} \left( \frac{dT}{d\delta} \right)_{\delta=0}$$

軌道長の変化

$$\alpha_c = \frac{1}{C_0} \left( \frac{dC}{d\delta} \right)_{\delta=0} \quad (\delta = (p - p_0) / p_0)$$

$$\eta_c = \alpha_c - \gamma^{-2}, \quad \because v = pc / \sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \quad T = C / v$$

エネルギーの高い粒子はリングの外側を回る  $\rightarrow \alpha_c > 0$   
電子加速器、高エネルギー陽子加速器では  $\gamma$  が大  $\rightarrow \eta_c > 0$   
低エネルギー陽子加速器では  $\gamma$  が小  $\rightarrow \eta_c < 0$

時間の変化

$$\eta_c = \frac{1}{T_0} \left( \frac{dT}{d\delta} \right)_{\delta=0}$$

軌道長の変化

$$\alpha_c = \frac{1}{C_0} \left( \frac{dC}{d\delta} \right)_{\delta=0}$$

$$(\delta = (p - p_0) / p_0)$$

$$v = pc/E = pc/\sqrt{p^2 + m^2c^2}, \quad \gamma_0 \equiv E_0/mc^2$$

$$T = C/v$$

$$\eta_c = \frac{1}{C_0/v_0} \left( \frac{d(C/v)}{d\delta} \right)_0 = \frac{1}{C_0/v_0} \left( \frac{1}{v_0} \frac{dC}{d\delta} - \frac{C_0}{v_0^2} \frac{dv}{d\delta} \right)_0$$

$$= \alpha_c - \frac{1}{v_0} \left( \frac{dp}{d\delta} \right)_0 \left( \frac{dv}{dp} \right)_0 = \alpha_c - \frac{1}{v_0} p_0 \frac{c}{E_0} \gamma^{-2}$$

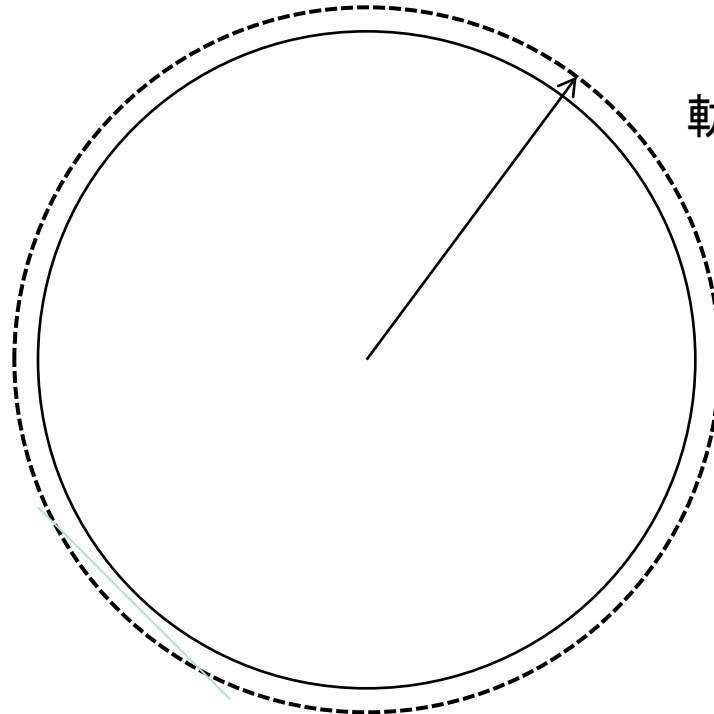
$$= \alpha_c - \gamma^{-2}$$

# Momentum compaction の例 1

一定磁場

$$B_y = \text{constant}$$

$$C \propto \rho \propto \frac{p}{B_y} \propto (1 + \delta) \quad \rightarrow \quad \alpha_c \equiv \frac{1}{C_0} \left( \frac{dC}{d\delta} \right)_{\delta=0} = 1$$



軌道半径が運動量に比例

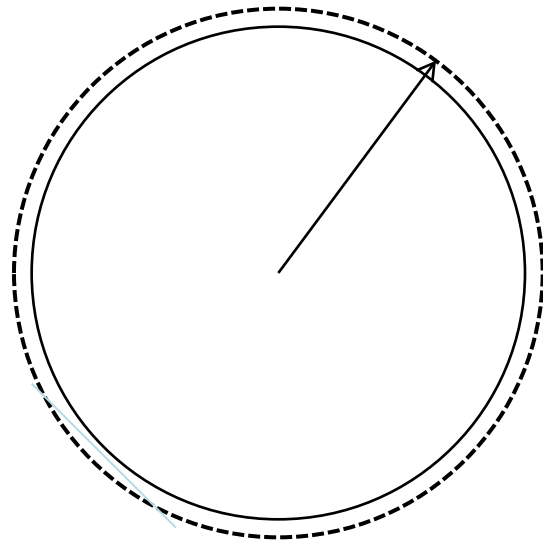
# Momentum compaction の例 2

一様磁場 (弱収束)

$$B_y = B_0(1 - Kx) = B_0 \left( 1 - \frac{a}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \right) \quad (0 < a < 1)$$

$$\rho \propto \frac{p}{B_y} \propto \frac{(1 + \delta)}{1 - a \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{2\pi(\rho - \rho_0)}{2\pi\rho_0} \approx \frac{\delta}{1 - a}$$

$$\rightarrow \alpha_c = 1/(1 - a) > 1$$



外側ほど磁場が弱いので、  
半径の比は運動量の比より大きい

# 高周波による加速

- 粒子は加速空洞を通過する度にエネルギー ( $E$ ) に変化を受ける。 $n$  周目では

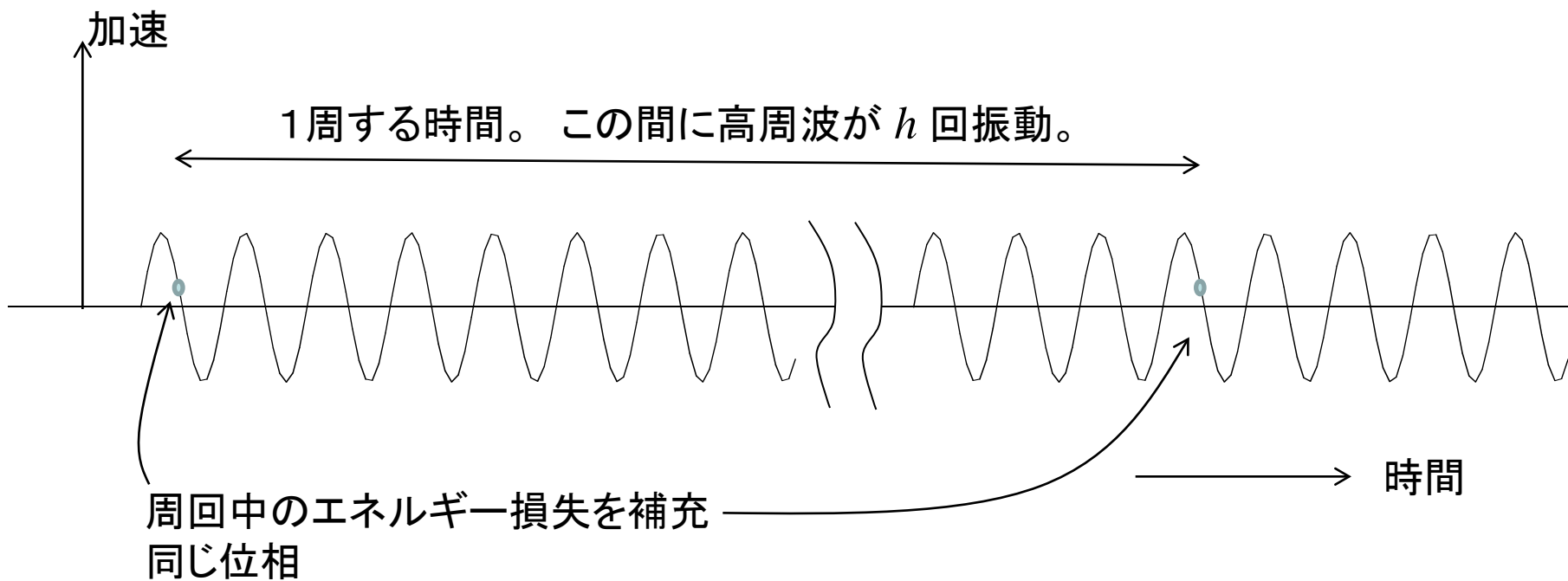
$$E \rightarrow E + eV \sin(\omega(nT_0 + t) + \psi_0)$$

- 何回周回してきても常に同じ  $E, t$  であるような粒子を基準とする。(  $E=E_0, t=0$  ) (横方向の運動で、閉軌道を考えたことに対応)
- 周回時間は高周波の周期の整数倍

$$\omega T_0 = 2\pi h \quad (h = \text{integer}) \quad h \text{ は、harmonic number と呼ばれる}$$

- (シンクロトロン放射による) エネルギー損失を周回毎に補充

$$eV \sin \psi_0 = U_0 \quad (\text{Energy loss/turn})$$



# 加速高周波の周波数と粒子のエネルギー

- 基準となる粒子が1周する時間(閉軌道の長さ/速さ)は高周波の周期の整数倍
- 周波数をわずかに変えると、それに合うような、別の閉軌道が基準となる。基準となる粒子のエネルギーが変わる。

$$fT = h \quad \rightarrow \quad \eta_c = \frac{f_0}{h} \left( \frac{d}{d\delta} \left( \frac{h}{f} \right) \right)_{\delta=0} = -\frac{1}{f_0} \left( \frac{df}{d\delta} \right)_{\delta=0}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{1}{\eta_c} \frac{\Delta f}{f}$$

# シンクロトロン振動の導出

- 1周当たりのエネルギーの変化の1次近似

$$\begin{aligned}\frac{d\delta}{dn} &= \frac{eV}{E_0} \sin(\omega t + \psi_0) - \frac{U_0}{E_0} = \frac{eV}{E_0} [\sin(\omega t) \cos \psi_0 + \cos(\omega t) \sin \psi_0] - \frac{U_0}{E_0} \\ &\approx \frac{eV \omega \cos \psi_0}{E_0} t \quad (\omega t \ll 1, \quad \delta \equiv (E - E_0)/E_0 \approx (p - p_0)/p_0)\end{aligned}$$

- 1周当たりの通過時刻の変化の1次近似

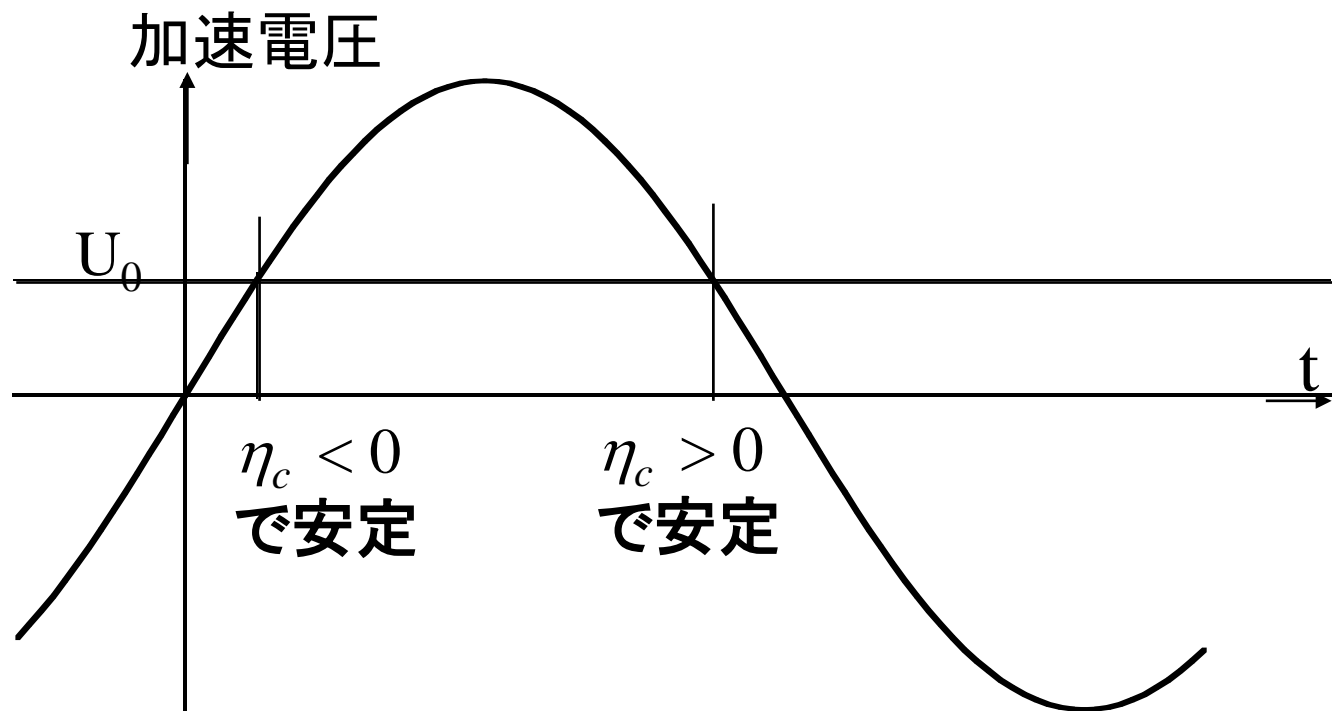
$$\frac{dt}{dn} \approx T_0 \eta_c \delta$$

- 調和振動子の方程式になる

$$\frac{d^2 t}{dn^2} = -\Omega^2 t, \quad \frac{d^2 \delta}{dn^2} = -\Omega^2 \delta \quad \Omega^2 = -\frac{eVT_0 \omega \eta_c \cos \psi_0}{E_0}$$

- 安定な振動の条件:  $\Omega^2 > 0 \Leftrightarrow e\eta_c \cos \psi_0 < 0$





# Transition

- これまでの話で、安定条件は  $e\eta_c \cos\psi_0 < 0$
- 陽子(またはより重いイオン)シンクロトロンでは、加速するとき、
  - 低エネルギーでは  $\eta_c < 0$
  - あるエネルギーで  $\eta_c = 0$  となり、
  - その後の高エネルギーでは  $\eta_c > 0$  になる。
- 安定な位相が突然変わる。
- 振動の周波数がゼロになる(不安定)  $\Omega^2 = -\frac{eVT_0\omega\eta_c \cos\psi_0}{E_0}$

# 時刻とエネルギーの振幅

- 通過時刻の振幅はエネルギーの振幅に比例

$$A_t = \sqrt{\frac{-T_0 \eta_c E_0}{e V T_0 \omega \cos \psi_0}} A_\delta$$

- これに粒子の速度(高エネルギーでは光速)を掛けたものは縦方向の相対位置の振動の振幅
  - この係数が、エネルギーの広がり(Energy spread)とバンチ長(bunch length)の比。
  - Momentum compaction の平方根に比例
  - 空洞電圧の平方根に反比例

# シンクロトロン振動 まとめ

- 周回に要する時間が粒子のエネルギーに依存  
(Momentum compaction)
- 1周当たりのエネルギーの変化が通過時刻に依存  
(時間的に変化する加速電圧)
- これらの線形近似(1次のみとる)により、エネルギーと通過時刻が調和振動する。
- Transition
  - 加速により Momentum compaction の符号が変わる場合は、特別な対策が必要。

# Dispersion, Chromaticity

# Dispersion

- エネルギーに依存した、閉軌道の変化。その線形部分

$$\eta_x(s) \equiv \frac{dx_C(\delta, s)}{d\delta}$$

$$\eta_y(s) \equiv \frac{dy_C(\delta, s)}{d\delta} \quad (\delta \equiv (E - E_0) / E_0)$$

- 設計軌道からの位置のずれは、エネルギー依存の部分とベータatron振動の部分に分けられる

$$x(s) = \eta_x(s)\delta + x_\beta(s)$$

$$y(s) = \eta_y(s)\delta + y_\beta(s)$$

- 誤差がなければ  $y$  方向のdispersionはゼロ（設計軌道が水平面内にある場合）

# Dispersion と Momentum Compaction の関係

- 閉軌道では、  $x(s) = \eta_x(s)\delta$
- 設計軌道が曲がっているところでは、軌道の長さが、 $x$  に依存する（外側を通ると長くなる）。微小区間での差は、

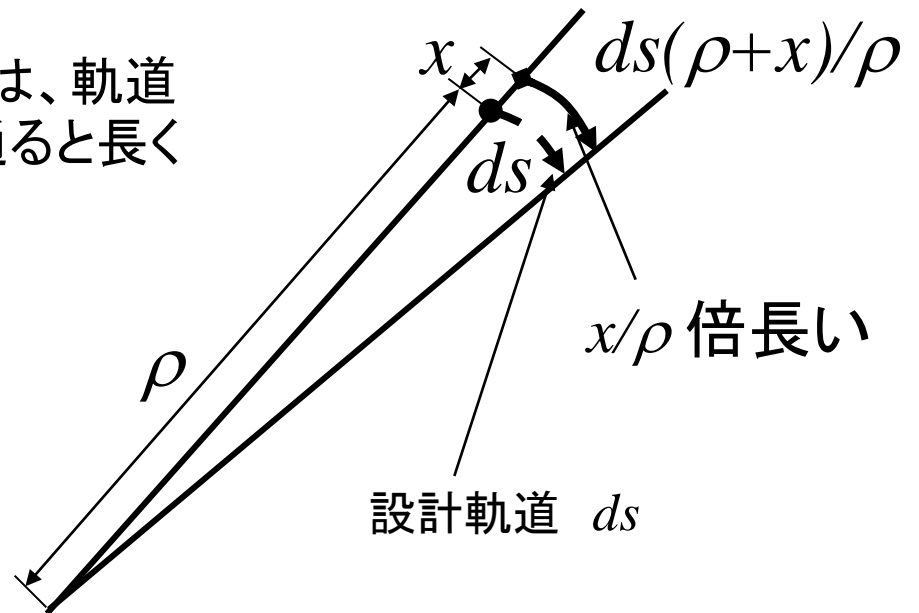
$$(x/\rho)ds = (\eta_x\delta/\rho)ds$$

- 全周での長さの差は

$$\Delta C = \delta \int (\eta_x / \rho) ds$$

- Momentum Compaction

$$\alpha_c = \frac{\Delta C}{\delta C_0} = \frac{1}{C_0} \int (\eta_x / \rho) ds$$



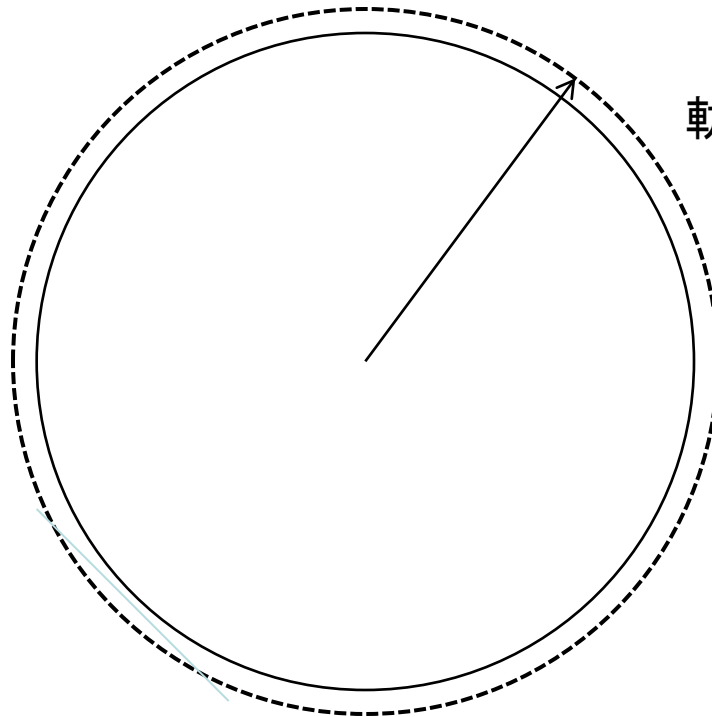
# Dispersion の例 1

## 一定磁場

$$B_y = \text{constant}$$

$$\rho \propto \frac{p}{B_y} \propto (1 + \delta) \rightarrow x = \rho_0 \delta \rightarrow \eta_x = \rho_0$$

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \frac{1}{C_0} \int (\eta_x / \rho_0) ds \\ &= \frac{1}{C_0} \int ds = 1 \end{aligned}$$



軌道半径が運動量に比例

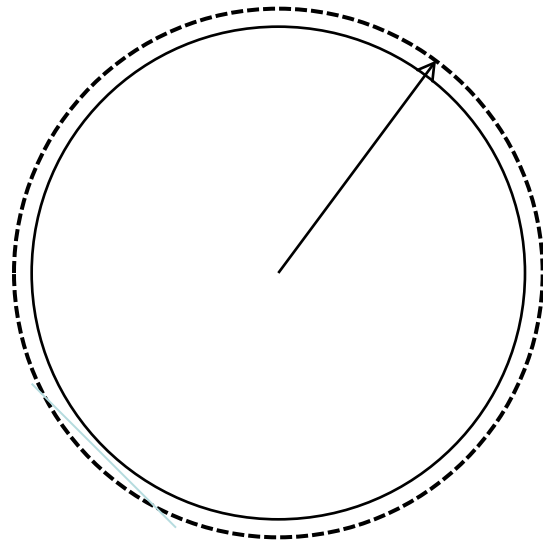


# Dispersion の例 2

一様磁場 (弱収束)

$$B_y = B_0(1 - Kx) = B_0 \left( 1 - \frac{a}{\rho_0} (\rho - \rho_0) \right) \quad (0 < a < 1)$$

$$\rho \propto \frac{p}{B_y} \propto \frac{(1 + \delta)}{1 - a \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}} \quad \rightarrow \quad \eta_x \approx \frac{\rho_0}{1 - a} \quad \rightarrow \quad \alpha_c = 1/(1 - a) > 1$$



外側ほど磁場が弱いので、  
半径の比は運動量の比より大きい

# 強収束での Dispersion, Momentum compaction

- 強い収束のため、(x方向) dispersion は大きくなる (ベータ関数と同様、リング全体の大きさに関係なくなる。)

$$\eta_x \ll \rho_0$$

- 従って、Momentum compaction も小さい。

$$\alpha_c \ll 1$$

# Chromaticity

- エネルギーに依存した、チューンの変化。その線形部分

$$\xi_{x,y} \equiv \frac{dv_{x,y}(\delta)}{d\delta}$$

- 磁場が2極成分と4極成分だけだとすると、収束(発散)力は全てエネルギーに反比例。→ Chromaticity 負で、絶対値大
  - ビーム内の粒子のエネルギーの広がりによって、チューンに大きな幅ができる。
  - 結果として、共鳴を引き起こしたり、マッチングを取ることが困難になったりして、ビームが失われることもある。
- Chromaticity 制御のために dispersion のある場所に6極磁石が置かれる

# 6極磁場によるChromaticity 制御



- 6極磁場  $B_y = a_3(x^2 - y^2)$   
 $B_x = 2a_3xy$
- エネルギーの相対的ずれ  $\delta$  の粒子：閉軌道が磁場中心から  $x$  方向に  $\eta_x \delta$  ずれる。  $x(s) = \eta_x(s)\delta + x_\beta(s)$
- 閉軌道の近くの磁場を考えると、エネルギーに比例した収束(発散)力  
 $B_y = a_3((\eta_x \delta + x_\beta)^2 - y^2) \sim -2a_3\eta_x \delta x_\beta$   
 $B_x = 2a_3(\eta_x \delta + x_\beta)y \sim -2a_3\eta_x \delta y$
- ベータ関数の異なる場所に強さの違う6極磁石を置くことにより、 $x, y$  両方向の chromaticity を制御できる
- 1個の6極磁石によるエネルギーに依存したチューンの変化は、「余分な4極磁場」の議論より、

$$\Delta \nu_{x,y} \approx \mp \frac{1}{4\pi} k \beta_{x,y} \propto \mp a_3 \eta_x \beta_{x,y} \delta$$

## 6極磁場によるChromaticity 制御 2

$$\Delta v_{x,y} \approx \mp \frac{1}{4\pi} k \beta_{x,y} \propto \mp a_3 \eta_x \beta_{x,y} \delta$$

$x, y$  両方ともに  $\Delta v_{x,y} > 0$  としたい。

6極磁石を2個(2種類)用意し、異なるベータ関数の場所に置く

$$a_3 < 0, \quad \beta_x : \text{large}, \quad \beta_y : \text{small}$$

$$a_3 > 0, \quad \beta_y : \text{large}, \quad \beta_x : \text{small}$$

1個ずつでは補正しきれない場合、1種類につき多数の磁石を使用。

# Dispersion, Chromaticity

- Dispersion:
  - エネルギーに依存した、閉軌道の変化の線形部分
- Momentum compaction は 曲線部でのDispersion から決まる。
- Chromaticity:
  - エネルギーに依存した、チューンの変化の線形部分
- Chromaticity を制御するために6極磁石が使われる

# シンクロトロン放射のビームへの影響

# シンクロトロン放射

- 荷電粒子が加速度運動をすると電磁波が放出される。
- 特に、磁場によってビーム粒子が曲げられるときに出る電磁波をシンクロトロン放射と言う。
- シンクロトロン放射は、高エネルギーの電子(陽電子)加速器の場合に重要。重い粒子では重要でない
  - 放射のパワー:

$$P_{\gamma} \propto \frac{\gamma^4}{\rho^2} \propto \frac{E^2 B^2}{m^4}$$
$$\left( \gamma \equiv \frac{E}{mc^2} \right)$$



# 電子と陽子加速器の放射の効果の比較

- 放射パワー 
$$P_\gamma \propto \frac{\gamma^4}{\rho^2} \propto \frac{E^2 B^2}{m^4}, \quad \left( \gamma \equiv \frac{E}{mc^2} \right)$$

- 同じエネルギー、同じ磁場ならば、 $1/m^4$  に比例

- 電子加速器の例: エネルギー8GeV、半径500mの円形

- KEKBのパラメータに近い(同じではない)。

- 陽子加速器の例: エネルギー7TeV、半径4500mの円形

- LHCのパラメータに近い(同じではない)。

- パワーの比 
$$\frac{P_{\gamma,e}}{P_{\gamma,p}} = \left( \frac{\gamma_e}{\gamma_p} \right)^4 \left( \frac{\rho_e}{\rho_p} \right)^{-2} \approx 2^4 \times \left( \frac{1}{9} \right)^{-2} \approx 1300$$

(TRISTAN は  
これの300倍)

- 放射減衰時間の比

- 0.1 秒と 40 時間

$$\frac{\tau_p}{\tau_e} \sim \left( \frac{E_{0,e}}{E_{0,p}} \right)^{-1} \frac{P_{\gamma,e}}{P_{\gamma,p}} \approx 1.1 \times 10^6$$

# 放射減衰

- シンクロトロン放射によるエネルギー損失と、加速によるその補填を繰り返すことにより、シンクロトロン振動、ベータトロン振動が減衰する。
- シンクロトロン振動の減衰
  - エネルギーの高い粒子はより多くのエネルギーを失う
- ベータトロン振動の減衰
  - ビーム軸方向に加速されるとき横方向の角度が減少

# シンクロトロン振動の放射減衰(大雑把な話)

- 放射パワーが  $E^2 B^2$  に比例することから、1周当たりのエネルギー損失は(ほぼ)  $E^2$  に比例する。
- エネルギーの高い粒子ほど、エネルギー損失が大きい。

$$U \approx U_0 E^2 / E_0^2 \approx U_0 (1 + \delta)^2 \approx U_0 + 2\delta U_0 \quad (\delta = (E - E_0) / E_0)$$

- シンクロトロン振動を導いた時の式の修正 ~~( $U_0 \rightarrow U$ )~~

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{eV}{E_0} \sin(\omega t + \psi_0) - \frac{U}{E_0} \approx \frac{eVT_0 \omega \cos \psi_0}{E_0} t - \frac{2U_0}{E_0} \delta$$

- 最後の項が減衰を表す

$$\frac{d^2 \delta}{dn^2} = -\Omega^2 \delta - 2 \frac{U_0}{E_0} \frac{d\delta}{dn} \quad \Rightarrow \quad \delta(n) \sim \delta(0) \exp\left(i\Omega n - \frac{U_0}{E_0} n\right)$$

- 振幅が  $\exp(-nU_0/E_0)$  のように減衰、
- 振幅が  $1/e$  になる時間: damping time:  $\tau_z \sim T_0 E_0 / U_0$

# ベータトロン振動の放射減衰(大雑把な話)

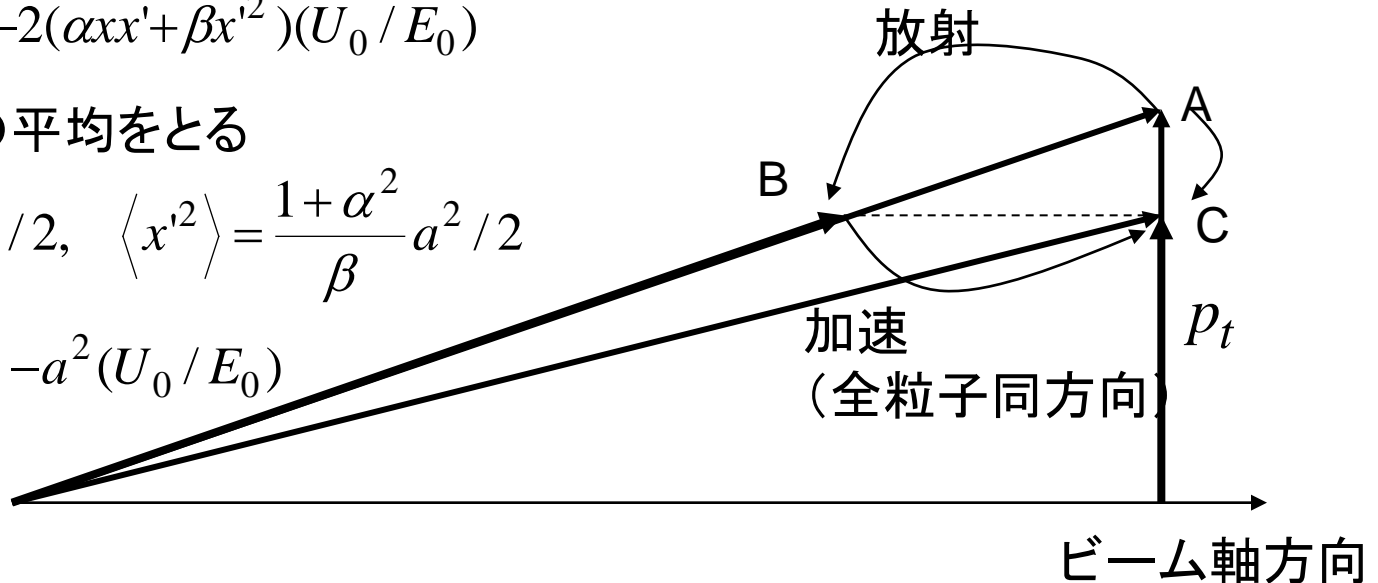
- 放射により粒子が失う運動量はその進行方向。
  - 横方向の運動量も比例して減少する。運動の角度は変化しない
- 加速はビーム軸方向(すべての粒子に共通)
  - 横方向の運動量は変化しない。運動の角度が減少する
- 周回毎に、 $x' \rightarrow x' - (U_0 / E_0)x'$  のように角度が減少する
- Courant-Snyder 不変量  $a^2 = ((1 + \alpha^2) / \beta)x^2 + 2\alpha xx' + \beta x'^2$  の変化は、

$$\Delta(a^2) = -2(\alpha xx' + \beta x'^2)(U_0 / E_0)$$

- 多数の周回の平均をとる

$$\langle xx' \rangle = -\alpha a^2 / 2, \quad \langle x'^2 \rangle = \frac{1 + \alpha^2}{\beta} a^2 / 2$$

$$\Rightarrow \langle \Delta(a^2) \rangle = -a^2 (U_0 / E_0)$$



# ベータトロン振動の放射減衰(大雑把な話) 2

- 1周回当たりのCourant-Snyder 不変量の変化

$$\langle \Delta(a^2) \rangle = -a^2 (U_0 / E_0)$$

- Courant-Snyder 不変量の減衰

$$a^2(n) \approx a^2(0) \exp(-nU_0 / E_0)$$

- ベータトロン振動の振幅はこの平方根

$$a(n) \approx a(0) \exp(-nU_0 / (2E_0))$$

$$a(t) \approx a(0) \exp(-tU_0 / (2E_0T_0))$$

- 振幅が $1/e$  になる時間: Damping time

$$\tau_{x,y} \sim 2T_0E_0 / U_0 \sim 2\tau_z$$

# 放射減衰(大雑把な話) まとめ

- シンクロトロン振動の減衰
  - エネルギーの高い粒子はより多くのエネルギーを失う
- ベータトロン振動の減衰
  - ビーム軸方向に加速されるとき横方向の角度が減少
- Damping time: 振幅が $1/e$  になる時間

$$\tau_z \sim T_0 E_0 / U_0$$

$$\tau_{x,y} \sim 2T_0 E_0 / U_0$$

# 放射減衰「少し細かい話」 1

放射パワーは  $E^2 B^2$  に比例するが、「大雑把な話」では、 $E^2$  依存のみ考えたが、ここでは、以下の2つの効果も考えに入れる。

- 偏向磁場中を走る距離が  $x$  に依存する
  - 外側を通ると  $(1 + x/\rho)$  倍距離が長くなる
- ある場所  $s$  での磁場の強さ  $B$  が  $x$  に依存する (combined bend)

$$B(x) \approx B(0) + \frac{dB}{dx} x = B(0) \left( 1 + \frac{1}{B(0)} \frac{dB}{dx} x \right) = B(0)(1 + \rho K x)$$

4極磁場と2極磁場の強さの比

- 行程  $ds$  当たりの放射エネルギー

$$\begin{aligned} P_\gamma(ds/c) &\approx P_{\gamma 0} (1 + \delta)^2 (1 + x/\rho) (1 + \rho K x)^2 (ds/c) \\ &\approx P_{\gamma 0} (1 + 2\delta + x/\rho + 2\rho K x) (ds/c) \end{aligned}$$

## 放射減衰「少し細かい話」 2

$$P_\gamma(ds/c) \approx P_{\gamma 0}(ds/c)(1 + 2\delta + x/\rho + 2\rho Kx)$$

- $x = \eta_x \delta + x_\beta$  と分けて

$$P_\gamma\left(\frac{ds}{c}\right) \approx P_{\gamma 0}\left(\frac{ds}{c}\right) \left( 1 + \left( 2 + \frac{\eta_x}{\rho} + 2\rho K\eta_x \right) \delta + \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) x_\beta \right)$$



# シンクロトロン振動の放射減衰「少し細かい話」

$$P_\gamma\left(\frac{ds}{c}\right) \approx P_{\gamma 0}\left(\frac{ds}{c}\right)\left(1 + \left(2 + \frac{\eta_x}{\rho} + 2\rho K\eta_x\right)\delta + \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho K\right)x_\beta\right)$$

- リング1周のエネルギー損失
  - $x_\beta$  は振動するので、平均してゼロ。

$$U = \int P_\gamma\left(\frac{ds}{c}\right) \approx U_0(1 + 2\delta) + \int P_{\gamma 0}\left(\frac{\eta_x}{\rho} + 2\rho K\eta_x\right)\left(\frac{ds}{c}\right)\delta$$

$$\frac{1}{\tau_z} = \frac{1}{E_0 T_0} \left[ U_0 + \frac{2r_e mc^2 \gamma_0^4}{3} \int \left( \frac{K\eta}{\rho_0} + \frac{\eta}{2\rho_0^3} \right) ds \right]$$

「大雑把な話」では、この項が考慮されなかった

# x 方向ベータatron振動の放射減衰「少し細かい話」1

$$P_\gamma \left( \frac{ds}{c} \right) \approx P_{\gamma 0} \left( \frac{ds}{c} \right) \left( 1 + \left( 2 + \frac{\eta_x}{\rho} + 2\rho K \eta_x \right) \delta + \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) x_\beta \right)$$

- $x = \eta_x \delta + x_\beta$ ,  $x' = \eta'_x \delta + x'_\beta$ 、放射で位置角度は変わらないので、放射によるエネルギー変化  $\Delta \delta$  で、

$$\Delta x_\beta = -\eta_x \Delta \delta, \quad \Delta x'_\beta = -\eta'_x \Delta \delta$$

- $ds$  間の Courant-Snyder 不変量の変化

$$\begin{aligned} & \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) (x_\beta - \eta_x \Delta \delta)^2 + 2\alpha (x_\beta - \eta_x \Delta \delta) (x'_\beta - \eta'_x \Delta \delta) + \beta (x'_\beta - \eta'_x \Delta \delta)^2 \\ & - \left( \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) x_\beta^2 + 2\alpha x_\beta x'_\beta + \beta x'^2_\beta \right) \end{aligned}$$

$$\approx -2\Delta \delta \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) \eta_x x_\beta + \alpha \eta'_x x_\beta + \alpha \eta_x x'_\beta + \beta \eta'_x x'_\beta$$

$$\approx 2P_{\gamma 0} \left( \frac{ds}{c} \right) \left( 1 + \left( 2 + \frac{\eta_x}{\rho} + 2\rho K \eta_x \right) \delta + \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) x_\beta \right)$$

$$\times \left( \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) \eta_x x_\beta + \alpha \eta'_x x_\beta + \alpha \eta_x x'_\beta + \beta \eta'_x x'_\beta \right)$$

## x 方向ベータatron振動の放射減衰「少し細かい話」2

- Courant-Snyder 不変量の変化

$$\Delta a^2 \approx 2P_{\gamma 0} \left( \frac{ds}{c} \right) \left( 1 + \left( 2 + \frac{\eta_x}{\rho} + 2\rho K \eta_x \right) \delta + \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) x_\beta \right) \\ \times \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) \eta_x x_\beta + \alpha \eta'_x x_\beta + \alpha \eta_x x'_\beta + \beta \eta'_x x'_\beta$$

- これの平均をとる(多数の粒子の平均、または多数の周回の平均)

-  $x_\beta, x'_\beta$  の1次の項は振動するので、平均をとるとゼロ

$$\langle \Delta a^2 \rangle \approx 2P_{\gamma 0} \left( \frac{ds}{c} \right) \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) \\ \times \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) \eta_x \langle x_\beta^2 \rangle + \alpha \eta'_x \langle x_\beta^2 \rangle + \alpha \eta_x \langle x_\beta x'_\beta \rangle + \beta \eta'_x \langle x_\beta x'_\beta \rangle \\ = P_{\gamma 0} \left( \frac{ds}{c} \right) \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) \eta_x a^2 \\ \because \langle x_\beta^2 \rangle = \beta a^2 / 2, \quad \langle x_\beta x'_\beta \rangle = -\alpha a^2 / 2$$

## $x$ 方向ベータatron振動の放射減衰「少し細かい話」3

- (加速空洞での)加速によるCourant-Snyder 不変量の変化

$$\langle \Delta a^2 \rangle = -(U_0 / E_0) a^2$$

- 放射によるCourant-Snyder 不変量の変化(1周当たり)

$$\langle \Delta a^2 \rangle \approx \int P_{\gamma 0} \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) \eta_x \left( \frac{ds}{c} \right) \times a^2$$

「大雑把な話」では考慮されなかった

## y 方向ベータatron振動の放射減衰「少し細かい話」

- 放射によるCourant-Snyder 不変量の変化は、x 方向と同様に

$$\Delta a^2 \approx 2P_{\gamma 0} \left( \frac{ds}{c} \right) \left( 1 + \left( 2 + \frac{\eta_x}{\rho} + 2\rho K \eta_x \right) \delta + \left( \frac{1}{\rho} + 2\rho K \right) x_\beta \right) \\ \times \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) \eta_y y_\beta + \alpha \eta'_y y_\beta + \alpha \eta_y y'_\beta + \beta \eta'_y y'_\beta$$

となるが、y 方向の dispersion がゼロであることから、これはゼロ。

$$\eta_y = 0, \eta'_y = 0$$

$$\Delta a_y^2 \approx 0$$

y 方向については、「大雑把な話」と同じ

# 放射減衰「少し細かい話」 （「大雑把な話」の修正） まとめ

- 放射パワー

$$P_\gamma\left(\frac{ds}{c}\right) \approx P_{\gamma 0}\left(\frac{ds}{c}\right) \left( 1 + 2\delta + \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho K\right)\eta_x\delta + \left(\frac{1}{\rho} + 2\rho K\right)x_\beta \right)$$

- 1周当たりのエネルギー損失

$$U = \int P_\gamma\left(\frac{ds}{c}\right) \approx U_0(1 + 2\delta) + \int P_{\gamma 0}\left(\frac{1}{\rho} + 2\rho K\right)\eta_x\left(\frac{ds}{c}\right)\delta$$

- 1周当たりの放射による  $x$  方向ベータatron振動の変化

$$\langle \Delta a^2 \rangle \approx \int P_{\gamma 0}\left(\frac{1}{\rho} + 2\rho K\right)\eta_x\left(\frac{ds}{c}\right) \times a^2$$

- この結果、damping time は修正される（テキスト参照）

# Damping partition number

- $x, y, z$  の減衰時間の逆数(damping time) = 減衰率(damping rate)の和は(「細かい話」でも、一般に)

$$\frac{1}{\tau_x} + \frac{1}{\tau_y} + \frac{1}{\tau_z} = \frac{2U_0}{E_0 T_0}$$

- Damping partition number

$$J_{x,y,z} = \frac{1}{\tau_{x,y,z}} \frac{E_0 T_0}{2U_0}$$

$$J_x + J_y + J_z = 4$$

- 「大雑把な話」では、 $J_x = J_y = 1, J_z = 2$

# 放射励起

- シンクロトロン放射の量子論的効果により粒子のエネルギーにでたらめな変化が生じる。このため、粒子の振動が励起される。
- シンクロトロン振動の励起: エネルギーのでたらめな変化により直接振動が励起される。
- ベータトロン振動の励起: エネルギーのでたらめな変化が Dispersion (縦方向と横方向の運動のカップリング) を通じて横方向の変化となり、振動が励起される。



# シンクロトロン放射の性質 1

- 1粒子が単位時間あたりに放出する、エネルギーが  $u$  と  $u+du$  の間にある光子の個数の期待値を  $n(u)du$  とする。

$$n(u)du = \frac{8}{27} \frac{r_e mc}{\hbar^2} \gamma^{-2} \frac{u_c}{u} S\left(\frac{u}{u_c}\right)$$

- $K$  は modified Bessel function

$$S(x) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} x \int_x^\infty K_{5/3}(y) dy$$

- Critical energy

$$u_c = (3\hbar c \gamma^3 / 2\rho)$$

# シンクロトロン放射の性質 2

- 放射パワー(時間当たりの放射エネルギー)

$$P_\gamma = \int_0^\infty un(u)du = \frac{2r_e mc^3}{3} \frac{\gamma^4}{\rho^2}$$

- 単位時間当たりの放出光子数

$$\dot{N} = \int n(u)du = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_\gamma}{u_c} \quad u_c = (3\hbar c\gamma^3 / 2\rho)$$

- 光子のエネルギーの平均

$$\bar{u} = \int_0^\infty un(u)du / \int_0^\infty n(u)du = P_\gamma / \dot{N} = \frac{8}{15\sqrt{3}} u_c$$

- 光子のエネルギーの2乗の平均

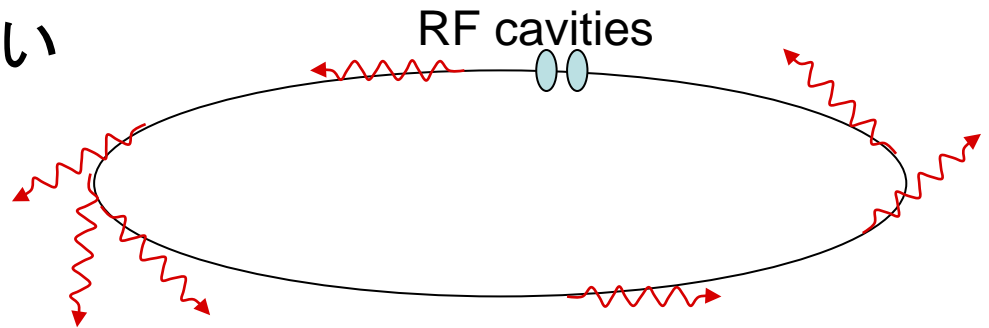
$$\overline{u^2} = \int_0^\infty u^2 n(u)du / \int_0^\infty n(u)du = \frac{11}{27} u_c^2$$

$\bar{u}, \overline{u^2}$  がゼロにならない  
のは量子論的效果

# 放射によるエネルギーの変化

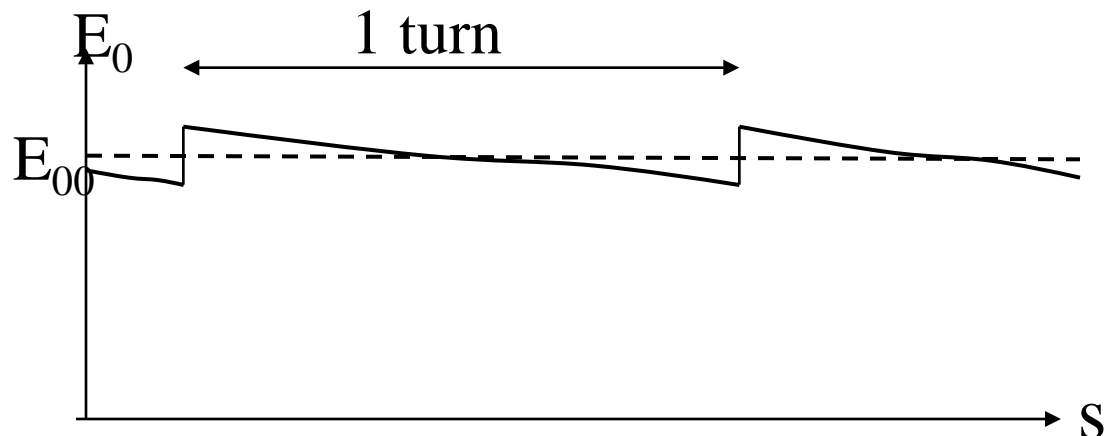
## 準備: エネルギーの基準、「ずれ」の再定義

- エネルギーは一定でない
- 加速空洞の前で低い
- 加速空洞の後で高い



- 場所ごとの基準:  $E_0$
- その平均:  $E_{00}$
- エネルギーのずれ

$$\delta \equiv (E - E_0) / E_{00}$$



# 放射によるエネルギーの変化

微小距離  $ds$  間のエネルギーの変化を考える

- エネルギー変化の平均

$$\int_0^\infty un(u)(ds/c)du = P_\gamma ds/c$$

- 「エネルギーのずれ」( $\delta \equiv (E - E_0)/E_{00}$ ) の変化の平均はゼロ。
  - なぜなら、 $E_0$  の変化は  $E$  の変化の平均と同じ。
- 「エネルギーのずれ」の変化の2乗の平均はゼロでない(量子効果)。
- $ds$  は小さく、放出光子数 0 または 1 以外の可能性が無視できるとすると、 $\delta^2$  の変化は、

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta E/E_{00} - \overline{\Delta E/E_{00}})^2} &= \overline{(\Delta E/E_{00})^2} - \overline{\Delta E/E_{00}}^2 \\ &= \left( \overline{u^2 \dot{N} ds/c} - (\overline{u \dot{N} ds/c})^2 \right) / E_{00}^2 \rightarrow \frac{\overline{u^2 \dot{N}} ds}{E_{00}^2 c} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{P_\gamma u_c}{E_{00}^2 c} ds \end{aligned}$$

光子1個のエネルギーが有限であることから生じるばらつき

# シンクロトロン振動の放射励起

- 放射によるエネルギーのばらつきによるシンクロトロン振動の振幅の変化を考える

$$A_\delta^2 = \delta^2 + \frac{eV\omega \cos\psi_0}{-T_0\eta_c E_0} t^2$$

- 第2項は放射で変化しないので、 $A_\delta^2$  の変化の平均は  $\delta^2$  の変化の平均に等しい。

$$\langle \Delta A_\delta^2 \rangle = \langle \Delta \delta^2 \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{P_\gamma u_c}{E_{00}^2} \frac{ds}{c}$$

- 1周当たりの変化は、

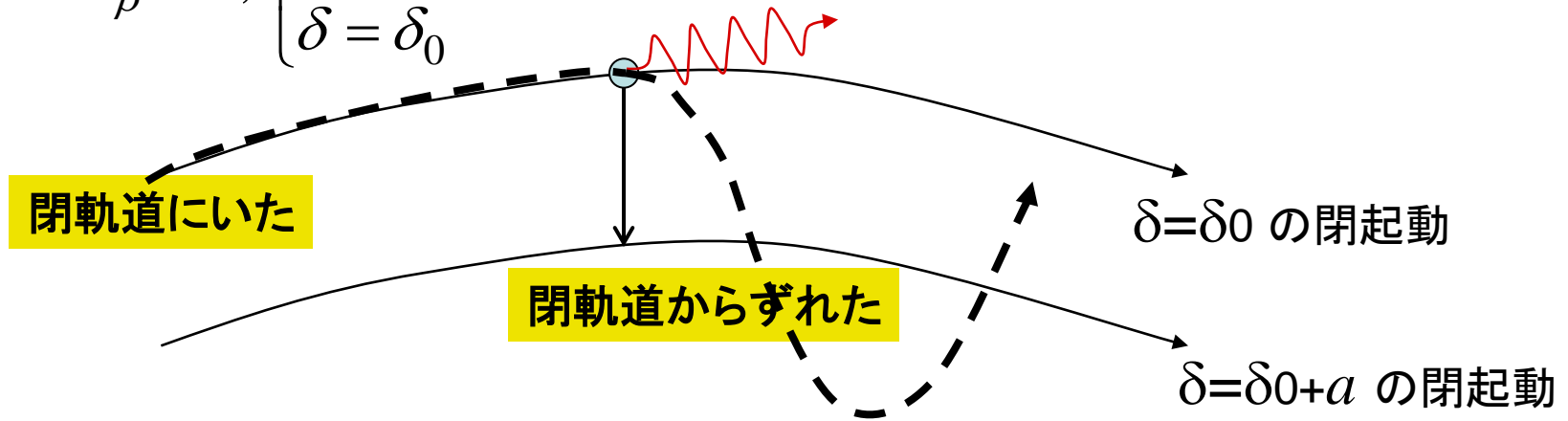
$$\frac{dA_\delta^2}{dn} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{T_0}{E_{00}^2} \overline{P_\gamma u_c}$$

$$\overline{P_\gamma u_c} = \hbar r_e m c^3 \gamma_0^7 \overline{(1/\rho^3)} = \frac{\hbar r_e m c^2 \gamma_0^7}{T_0} \int_0^{cT_0} (1/\rho^3) ds$$

# ベータトロン振動の放射励起の定性的説明

Dispersion がゼロでない場所でのradiation

$$x_\beta = 0, \begin{cases} x(s) = x_{CO}(s, \delta_0) \\ \delta = \delta_0 \end{cases}$$



$$x_\beta = -\eta_x a, \begin{cases} x(s) = x_{CO}(s, \delta_0) = x_{CO}(s, \delta_0 + a) - \eta_x a \\ \delta = \delta_0 + a \end{cases}$$

# ベータトロン振動の放射励起

- 位置、角度を閉軌道 (dispersionに依る) 部分とベータトロン振動の部分に分ける

$$x = \eta\delta + x_\beta, \quad x' = \eta'\delta + x'_\beta \quad (\text{y も同じ})$$

- $\delta$  が変化するときの Courant-Snyder 不変量の変化を考える。

$$a^2 = \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) x_\beta^2 + 2\alpha x_\beta x'_\beta + \beta x_\beta'^2$$

$$\langle \Delta a^2 \rangle = \left( \left( (1 + \alpha^2) / \beta \right) \eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2 \right) \langle \Delta \delta^2 \rangle \quad \because \langle \Delta \delta \rangle = 0$$

$$= \mathcal{H} \langle \Delta \delta^2 \rangle = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{1}{E_{00}^2} \mathcal{H} P_\gamma u_c \frac{ds}{c}$$

- 1周当たり

$$\mathcal{H} \equiv (1 + \alpha^2) / \beta \eta^2 + 2\alpha\eta\eta' + \beta\eta'^2$$

$$\frac{da^2}{dn} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{T_0}{E_{00}^2} \overline{\mathcal{H} P_\gamma u_c} \quad \overline{\mathcal{H} P_\gamma u_c} = \frac{\hbar r_e m c^c \gamma_0^7}{T_0} \int_0^{cT_0} (\mathcal{H} / \rho^3) ds$$

# 放射励起 まとめ

- 量子論的効果により、放射により粒子のエネルギーがでたらめにばらつく

$$\langle \Delta \delta^2 \rangle = \frac{\overline{u^2 \dot{N}} ds}{E_{00}^2 c} = \frac{55}{24\sqrt{3}} \frac{P_\gamma u_c ds}{E_{00}^2 c}$$

- 直接の効果として、シンクロトロン振動が励起される

$$\propto \int_0^{cT_0} (1/\rho^3) ds$$

- Dispersion を通して、ベータトロン振動が励起される。

$$\propto \int_0^{cT_0} (\mathcal{H} / \rho^3) ds$$

$$\left( \mathcal{H} \equiv (1 + \alpha^2) / \beta \eta^2 + 2\alpha \eta \eta' + \beta \eta'^2 \right)$$



# 中心極限定理、平衡エミッタンス 1

- 放射励起は確率的な過程。
- 各粒子の運動は、確率過程の多数の和として表せる。
  - 減衰時間の間に多数の光子を放出する
- 「中心極限定理」により、正規分布となる。
- 振動の位相はでたらめになり、「マッチング」のとれたビームになる
- エミッタンスは放射励起により増大し、放射減衰により減少する。
- 励起と減衰が釣り合うところ：平衡エミッタンス

$$\left(\frac{d\varepsilon_{x,y,z}}{dn}\right)_{\text{excite}} + \left(\frac{d\varepsilon_{x,y,z}}{dn}\right)_{\text{damp}} = 0$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_{x,y,z}}{dn}\right)_{\text{damp}} \propto \varepsilon_{x,y,z}, \quad \left(\frac{d\varepsilon_{x,y,z}}{dn}\right)_{\text{excite}} = \text{const}$$

- 注意：各粒子の振幅は大きくなったり小さくなったりしている。  
詳しくはテキスト参照

## 中心極限定理、平衡エミッタンス 2

- 「中心極限定理」が適用できるためには、減衰時間の間に多数の光子の放出(確率的な過程)がなければならない。

$$\dot{N} \tau \gg 1$$

- 前の結果  $\dot{N} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{P_\gamma}{u_c}, \quad \tau \approx \frac{E_0}{P_\gamma}$

- から、条件は、

$$\frac{E_0}{u_c} \gg 1$$

- これは常に成り立つ。
  - $u_c$  は1光子の代表的なエネルギー。
  - 1光子の放出で、ビーム粒子のエネルギーの多くの部分を失うような加速器は安定でない。

# シンクロトロン放射のビームへの影響 まとめ

- 放射減衰
  - 大雑把な話 ( $P_\gamma \propto E^2 B^2$ ,  $B = \text{constant}$ )
  - 少し細かい話 ( $P_\gamma \propto E^2 B^2$ ,  $B = B(x)$ )
- 放射励起
  - 量子論的効果。光子のエネルギーが有限。
  - エネルギーのでたらめな変化 → シンクロトロン振動の励起
  - エネルギーのでたらめな変化 + Dispersion → ベータトロン振動の励起
- 中心極限定理
  - 放射の影響で、粒子の分布は正規分布になる。
- 平衡エミッタンス
  - 減衰と励起が釣り合うところ

# Hamiltonian を使う(準備)

- Hamiltonian

$$H = H(x, p; t)$$

- Hamilton 方程式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\therefore \frac{dH}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

: Hamiltonian は、独立変数を頭に含まないならば定数

- Generating function  $G_1(x, x_1; t)$  による変数の変換(正準変換)

$$(x, p) \rightarrow (x_1, p_1), \quad H \rightarrow H_1$$

$$p = \frac{\partial G_1}{\partial x}, \quad p_1 = -\frac{\partial G_1}{\partial x_1}, \quad H_1 = H + \frac{\partial G_1}{\partial t}$$

# ベータトロン振動をHamiltonianで書く

- 調和振動する規格化座標をとる

$$X \equiv \frac{x}{\sqrt{\beta}} \quad P \equiv \nu \frac{dx}{d\phi} = \nu \left( \sqrt{\beta} x' + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}} x \right) \quad \begin{aligned} X &= a \cos(\phi + \phi_0) \\ P &= -a \nu \sin(\phi + \phi_0) \end{aligned}$$

- Hamiltonian

$$H(X, P; \varphi) = (\nu^2 X^2 + P^2) / 2 \quad \text{独立変数: } \varphi \equiv \phi / \nu$$

- Hamilton 方程式

$$\frac{dX}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial X} = P, \quad \frac{dP}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial P} = -\nu^2 X$$

- $G_1(X, \phi) = -(\nu/2) X^2 \tan \phi$  による正準変換  $(X, P) \rightarrow (\phi, J)$

$$P = \frac{\partial G_1}{\partial X}, \quad J = -\frac{\partial G_1}{\partial \phi} \quad \rightarrow \quad \tan \phi = -P / (\nu X), \quad J = (\nu X^2 + P / \nu) / 2$$

- 新たなHamiltonian と、Hamilton 方程式

$$H(\phi, J; \varphi) = \nu J \quad \frac{dJ}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{\partial H}{\partial J} = \nu$$

# Hamiltonian による共鳴の取り扱い

- 次の Hamiltonian から話を進める(この導出はテキスト参照)

$$H_1(J_1, \phi_1; \varphi) = \Delta\nu J_1 + AJ_1^{n/2} \cos(m_r \phi_1)$$

- 2項目は  $n$  重極磁場による  $m_r$  共鳴状態からくる

$$\Delta\nu = \nu - \nu_r, \quad \nu_r = (\text{integer}) / m_r$$

- 6極磁場成分による、チューンが整数の1/3である場合の共鳴 (third order resonance)

$$n = m_r = 3$$

$$H_1(J_1, \phi_1; \varphi) = \Delta\nu J_1 + AJ_1^{3/2} \cos(3\phi_1)$$

- このHamiltonianは独立変数を頭に含まないので不変

$$\Delta\nu J_1 + AJ_1^{3/2} \cos(3\phi_1) = \text{constant}$$

$$u = R \cos \phi_1, \quad y = R \sin \phi_1$$

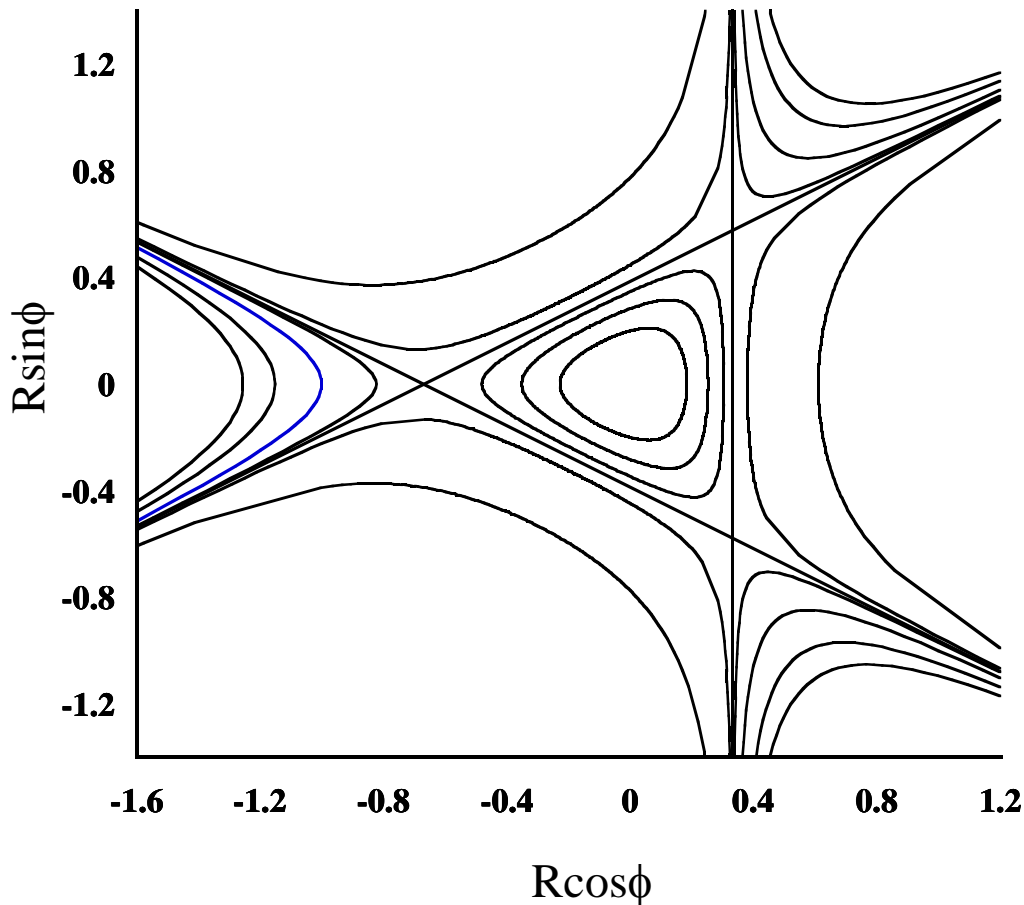
H= constant の軌跡

$$R^2 \equiv (A/\Delta v)^2 J_1$$

$$\left(u - \frac{1}{3}\right) \left(u + \frac{2}{3} - \sqrt{3}y\right) \left(u + \frac{2}{3} + \sqrt{3}y\right) = C$$

$C=0$  の3直線が  
separatorix となる。

3角形の内部が安定。



# シンクロトロン振動を Hamiltonian で書く

- 運動方程式

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{eV}{E_0} \sin(\omega t + \psi_0) - \frac{U_0}{E_0} \quad \frac{dt}{dn} = T_0 \eta_c \delta$$

- 前には、 $t$  の一次のみとって調和振動を得た。
- 今回は、近似を使わない。
- 変数を少し変える

$$x = -\omega t - \psi_0 + \pi$$

$$p = -\omega T_0 \eta_c \delta$$

- 運動方程式

$$\frac{dx}{dn} = p, \quad \frac{dp}{dn} = -\Omega_0^2 (\sin x - 1/b) \quad (\Omega_0 \equiv \sqrt{\omega \eta_c T_0 eV / E_0}, \quad b \equiv eV / U_0)$$

- Hamiltonian

$$H(x, p; n) = p^2 / 2 - \Omega_0^2 (\cos x + x/b)$$



$$H(x, p; n) = p^2 / 2 - \Omega_0^2 (\cos x + x/b) = \text{constant}$$

